



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TÉRMICA Y DE FLUIDOS

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL ALMACENAMIENTO  
DE ENERGÍA TÉRMICA EN UN LECHO FIJO**

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

AUTORA: ITZIAR SANCHO LLORENTE  
TUTORA: CELIA SOBRINO FERNÁNDEZ

## **RESUMEN**

---

Este trabajo se basa en simular numéricamente la transferencia de calor no estacionaria para el almacenamiento de energía térmica en un lecho fijo. Para llevar a cabo esta simulación es necesario describir el comportamiento real del lecho mediante un modelo matemático, este modelo se define con las ecuaciones de la energía que describen el proceso de transferencia de calor y que una vez adimensionalizadas y discretizadas podrán resolverse mediante la implementación en Matlab del método de Runge-Kutta de orden cuatro. Después de resolver el modelo, se analizarán los resultados de las distintas fases que intervienen en el proceso y se procederá a compararlo con las medidas experimentales obtenidas en el laboratorio y validar así la simulación.

Finalmente, se demuestra que los resultados de la simulación se ajustan correctamente a los experimentos y la influencia que tiene en el proceso considerar la energía almacenada en la pared.

## **ABSTRACT**

---

This project is based on a numerically simulated nonstationary heat transfer for the thermal energy storage in a fixed bed. To carry out this simulation, it is necessary to describe the real behavior of the fixed bed with a mathematical model. This model is defined by the energy equations that describe the heat transfer process. When the equations are in a dimensionless form and discretized, they will be solved by the implementation of the fourth order Runge-Kutta method in Matlab. After solving the model, the results will be analyzed for all the phases that take place in the process and it will be compared with the experimental measurements obtained in the laboratory and so validate the simulation.

Finally, it is shown that the simulation results fit correctly to the experiments and the influence that the energy stored in the wall has in the process.



## ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS .....	5
ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICAS .....	6
1. INTRODUCCIÓN .....	10
1.1 MARCO DEL ESTUDIO .....	11
1.2 OBJETIVO DEL ESTUDIO .....	12
1.3 DESCRIPCIÓN DE LA INSTALACIÓN .....	13
2. MODELO DE LECHO FIJO .....	14
2.1 HIPÓTESIS DEL MODELO DE LECHO FIJO .....	15
2.2 ECUACIONES DEL LECHO FIJO .....	16
2.2.1 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL FLUIDO .....	16
2.2.2 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL SÓLIDO .....	18
2.2.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA LA PARED .....	19
2.3 CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO .....	20
3. ADIMENSIONALIZACIÓN Y DISCRETIZACIÓN DEL MODELO .....	22
3.1 ADIMENSIONALIZACIÓN .....	23
3.1.1 PARÁMETROS ADIMENSIONALES .....	23
3.1.2 NUMEROS ADIMENSIONALES .....	27
3.1.3 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL FLUIDO .....	29
3.1.4 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL SÓLIDO .....	30
3.1.5 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA PARED .....	31
3.1.6 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE COTORNO .....	32
3.2 DISCRETIZACIÓN .....	34
3.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO .....	34
3.2.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES .....	35
3.2.3 DISCRETIZACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE CONTORNO .....	36
3.3 ECUACIONES ADIMENSIONALIZADAS Y DISCRETIZADAS .....	38
4. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA .....	40
4.1 DESARROLLO DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN .....	41



5. CORRELACIONES .....	49
5.1 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR .....	50
5.1.1 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA ENTRE LAS PARTÍCULAS Y EL FLUIDO ( $h$ ) .....	50
5.1.2 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA ENTRE LA PARED DEL LECHO Y EL FLUIDO ( $h_w$ ) .....	51
5.2 CONDUCTIVIDAD TÉRMICA EFECTIVA .....	52
6. RESULTADOS .....	53
6.1 CÁLCULO DE PARÁMETROS NECESARIOS PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA .....	54
6.1.1 CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR .....	56
6.1.2 CÁLCULO DE LAS CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS EFECTIVAS .....	57
6.2 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN .....	59
7. CONCLUSIONES .....	67
7.1 CONCLUSIONES .....	68
8. PRESUPUESTO .....	70
8.1 PRESUPUESTO DEL ESTUDIO .....	71
9. BIBLIOGRAFÍA .....	72
10. ANEXO .....	75



*ÍNDICE DE TABLAS*

TABLA 1. CARACTERÍSTICAS REFERENTES A LA GEOMETRÍA DEL LECHO ..... 54

TABLA 2. PROPIEDADES TÉRMICAS DE LA PARED ..... 55

TABLA 3. PROPIEDADES TÉRMICAS DEL AISLANTE..... 55

TABLA 4. PROPIEDADES TÉRMICAS DEL FLUIDO ..... 55

TABLA 5. PROPIEDADES TÉRMICAS DE LAS PARTÍCULAS SÓLIDAS ..... 55

TABLA 6. RESUMEN DE LOS VALORES NUMÉRICOS DE LOS PARÁMETROS NECESARIOS PARA LA  
SIMULACIÓN ..... 59

TABLA 7. PRESUPUESTO DEL PROYECTO ..... 71

## ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICAS

FIGURA 1. ESQUEMA DE LA INSTALACIÓN .....	13
FIGURA 2. CONDICIONES DE CONTORNO .....	20
FIGURA 3. DISCRETIZACIÓN DEL LECHO .....	35
GRÁFICA 1. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA TEMPERATURA ADIMENSIONAL DEL SÓLIDO DURANTE LA CARGA Y DESCARGA DEL LECHO. ....	60
GRÁFICA 2. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA TEMPERATURA DIMENSIONAL DEL SÓLIDO DURANTE LA CARGA Y DESCARGA DEL LECHO. ....	60
GRÁFICA 3. COMPARACIÓN DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA TEMPERATURA DIMENSIONAL DEL SÓLIDO DE LAS MEDIDAS EXPERIMENTALES CON LA SIMULACIÓN. ....	61
GRÁFICA 4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA TEMPERATURA ADIMENSIONAL DEL SÓLIDO, FLUIDO Y PARED DURANTE LA CARGA Y DESCARGA DEL LECHO. ....	63
GRÁFICA 5. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA TEMPERATURA DIMENSIONAL DEL SÓLIDO, FLUIDO Y PARED DURANTE LA CARGA Y DESCARGA DEL LECHO. ....	64
GRÁFICA 6. EVOLUCIÓN DE LA TEMPERATURA DIMENSIONAL DEL SÓLIDO CON RESPECTO A LA ALTURA DEL LECHO PARA UN TIEMPO DE 1000 SEGUNDOS.....	65
GRÁFICA 7. COMPARACIÓN DE LA ENERGÍA ALMACENADA EN LAS PARTÍCULAS SÓLIDAS CON LA ENERGÍA ALMACENADA EN LA PARED DEL LECHO FIJO. ....	66

## NOTACIÓN

$L$	Altura del lecho [m]
$d$	Diámetro [m]
$x$	Distancia longitudinal del lecho [m]
$A$	Área transversal del lecho [m]
$Q$	Caudal de fluido [l/min]
$u_s$	Velocidad superficial del fluido [m/s]
$u$	Velocidad intersticial del fluido [m/s]
$a_p$	Área superficial de las partículas por unidad de volumen del lecho [1/m]
$a_{w,b}$	Área superficial de la pared interior por unidad de volumen del lecho [1/m]
$a_{w,w}$	Área superficial de la pared interior por unidad de volumen de la pared [1/m]
$t$	Tiempo [s]
$T$	Temperatura del fluido [°C]
$\hat{T}$	Temperatura adimensional del fluido [ ]
$c_p$	Calor específico [J/Kg·K]
$h$	Coefficiente de transferencia de calor por convección [W/K · m <sup>2</sup> ]
$k$	Conductividad térmica [W/m·K]
$k_x$	Conductividad térmica efectiva [W/m·K]
$k_e^0$	Conductividad térmica efectiva estática [W/m·K]

$Re_{dp}$  Número de Reynolds [ ]

$Pr$  Número de Prandtl [ ]

$Nu$  Número de Nusselt [ ]

$Bi$  Número de Biot [ ]

$Fo$  Número de Fourier [ ]

### **Subíndices**

$i$  Interior

$o$  Exterior

$a$  Aire

$p$  Partícula

$s$  Sólido

$w$  Pared

$aisl$  Aislante

$in$  Entrada

$0$  Inicial

$max$  Máximo



### Letras griegas

$\varepsilon$	Porosidad del lecho – fracción de volumen [ ]
$\rho$	Densidad [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]
$\mu$	Viscosidad dinámica [ $\text{Kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ]
$\nu$	Viscosidad cinemática [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\alpha$	Difusividad térmica [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\theta$	Temperatura del sólido [ $^{\circ}\text{C}$ ]
$\hat{\theta}$	Temperatura adimensional del sólido [ ]
$\phi$	Temperatura de la pared [ $^{\circ}\text{C}$ ]
$\hat{\phi}$	Temperatura adimensional de la pared [ ]



## ***1.INTRODUCCIÓN***

## 1.1 MARCO DEL ESTUDIO

El uso responsable de los recursos energéticos se ha convertido en estos últimos años en un tema de gran interés que ha llevado al desarrollo de nuevos procesos energéticos. Estos procesos emplean de una manera más eficiente, económica y factible la energía.

Se está produciendo así un cambio de modelo energético, en el que tiene un papel fundamental el almacenamiento de energía térmica. Los sistemas de almacenamiento nos permiten reducir las oscilaciones temporales de la producción energética dándole así continuidad a los procesos, de tal manera que se puedan compensar los períodos de escasa producción con los picos de esta. Entre estos sistemas destaca el empleo de un lecho para almacenamiento térmico en el que se basa el estudio.

Un lecho consiste en un conjunto de partículas sólidas que forman una columna de una determinada altura a través de las que pasa un fluido en fase líquida o gaseosa. Se distinguen distintos tipos de lecho en función de la velocidad del fluido, que se pueden dividir en:

- Lecho fluidizado: la velocidad del fluido supera la velocidad de mínima fluidización. Las partículas se agitan dejando atrás su estado de reposo.
- Lecho fijo: el fluido se mueve a una velocidad menor que la velocidad de mínima fluidización. Las partículas se mantienen en reposo.

En este proyecto se estudia el comportamiento de un lecho fijo, en el que las partículas en reposo permiten el paso del fluido sin moverse. Esto implica que la altura del lecho y la porosidad sean constantes.

El almacenamiento térmico puede referirse a calor latente o sensible, siendo este último el más común. El almacenamiento por calor sensible se caracteriza porque el sólido almacenado y la pared del lecho aumentan su temperatura al entrar en contacto con un fluido caliente como consecuencia del proceso de transferencia de calor pero sin cambiar de fase. Este proceso se denomina carga del lecho, el proceso inverso, la descarga, recupera la energía térmica almacenada en el lecho cuando se introduce un fluido a la temperatura ambiente que se calienta al entrar en contacto con el sólido y la pared.

Por otra parte, el almacenamiento por calor latente mantiene el material energético a una temperatura constante mientras cambia de estado.

Existen diversos estudios basados en el empleo de un lecho para almacenamiento térmico, tanto por calor sensible como por calor latente y para lechos fijos y fluidos. En estos textos se propone un modelo que define el proceso empleado. La primera referencia a la modelización analítica de lecho fijo se atribuye a Schumann [1]. En concreto este modelo es unidimensional y transitorio, determina las temperaturas en la dirección axial del lecho con respecto al tiempo. Más tarde aparecen estudios en los que se introduce además la dirección radial como por ejemplo los textos de Beasley y Clark [2]. Otros estudios se basan en cómo pueden parámetros como el caudal, el diámetro de las partículas, la altura del lecho, la fracción de vacío o el material energético afectar al proceso de almacenamiento térmico. Uno de los estudios más destacados es el de Rady [3], cuyas hipótesis se han aplicado en la formulación de las ecuaciones de la energía en este trabajo.

## **1.2 OBJETIVO DEL ESTUDIO**

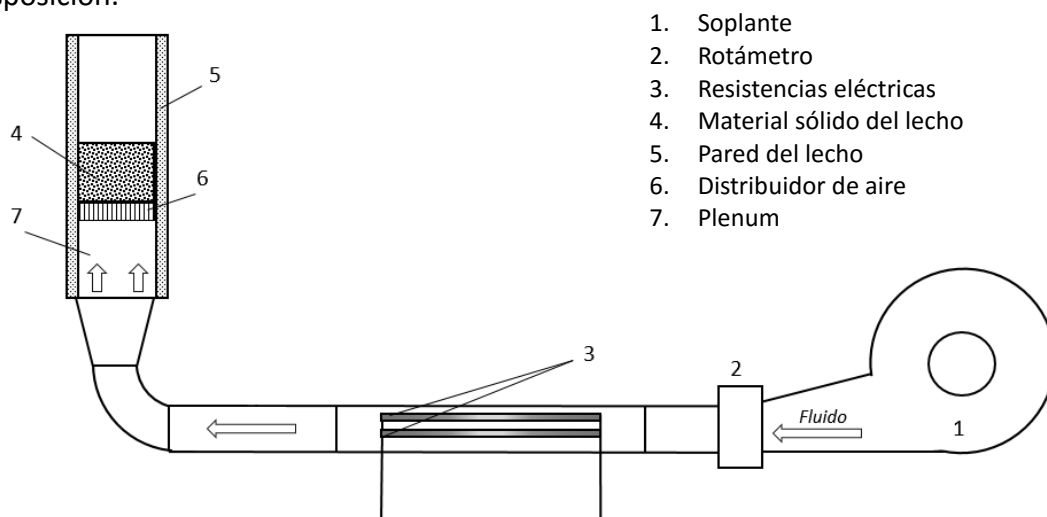
Este proyecto tiene como objetivo la simulación del proceso de transferencia de calor para el almacenamiento por calor sensible de energía térmica en un lecho fijo. Para lo cual se parte de un sistema unidimensional (se considera que la temperatura solo varía en la dirección axial del lecho) con tres ecuaciones características, una para el fluido, otra para el sólido y la última, para la pared del lecho. Y que se representa en derivadas parciales a partir de la modelización del proceso.

Una vez que estén las ecuaciones planteadas se procede a su adimensionalización y discretización para poder resolverlas mediante la implementación del método de análisis numérico Runge-Kutta de cuarto orden en el software matemático Matlab.

Por último, una vez hallados los datos simulados se compararán con las medidas experimentales que realizó el Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid y que ha proporcionado la tutora del proyecto. Además se analizará que influencia tiene incluir una tercera ecuación que englobe el almacenamiento térmico de la pared del lecho respecto a otros estudios en los que se despreciaba.

### 1.3 DESCRIPCIÓN DE LA INSTALACIÓN

En la siguiente figura se representan los elementos principales que componen la instalación empleada para simular el proceso de almacenamiento térmico en un lecho fijo y su disposición.



**Figura 1. Esquema de la instalación**

La instalación consta de un soplane que impulsa el flujo de fluido (aire) hasta el lecho mediante una tubería que los conecta. Con el empleo de un rotámetro se puede medir en la entrada el caudal de aire. Las resistencias eléctricas calientan el fluido, lo que permite simular el proceso de carga del lecho.

El material sólido del lecho, en este caso arena, está dispuesto en una columna cilíndrica con una geometría determinada que se definirá más adelante. El material de las paredes de este cilindro es acero inoxidable y está recubierto de un material aislante.

La instalación cuenta con un plenum, una cámara de aire que uniformiza el flujo que proviene de la tubería para que pueda posteriormente atravesar los orificios del distribuidor y entrar así en el lecho.

Por último, para conocer la variación de la temperatura a lo largo de la altura del lecho y poder medir el proceso de almacenamiento térmico se colocaron durante el montaje experimental una serie de termopares separados entre sí una distancia determinada. Y se comparará el resultado simulado matemáticamente con el experimental en los puntos donde están colocados.



## ***2. MODELO DE LECHO FIJO***

## 2.1 HIPÓTESIS DEL MODELO DE LECHO FIJO

Como se ha explicado anteriormente, para simular el proceso de transferencia de calor entre un fluido y un lecho fijo hay que describir el comportamiento del lecho en la realidad, para ello es necesario realizar un modelo a partir de una serie de hipótesis. En este caso la modelización es bastante compleja ya que la tasa de calor transferido en el lecho es función de las propiedades físicas del sólido, el fluido y la pared, de las características físicas del lecho y de la velocidad del fluido.

En gran parte de los modelos que explican el proceso de almacenamiento de energía térmica en lechos fijos (Rady [3]) se parte de las siguientes hipótesis:

- No existe generación de calor en el interior del lecho.
- Se desprecia la transferencia de calor por radiación.
- No se producen reacciones químicas.
- La geometría del lecho es cilíndrica.
- Las propiedades termofísicas del sólido, fluido y pared son independientes de la temperatura.
- En el interior de las partículas no hay gradiente de temperatura.

## 2.2 ECUACIONES DEL LECHO FIJO

Las ecuaciones de la energía que describen el proceso de transferencia de calor en el lecho fijo se pueden hallar considerando un volumen representativo que contenga una determinada cantidad de aire ( $\epsilon$ ) y partículas ( $1-\epsilon$ ), y teniendo en cuenta la termodinámica de no equilibrio entre las fases a distinta temperatura ( $T, \theta, \phi$ ). De esta manera se obtienen una ecuación para el fluido que rodea las partículas, una para el sólido y otra para la pared.

El modelo a resolver se define con estas ecuaciones y teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Fluido newtoniano.
- Modelo de tres fases, sólido, fluido y pared.
- Solo existen variaciones de temperatura en la dirección axial.
- No existe cambio de fase.
- No existe transferencia de masa.
- Los efectos de transferencia de calor por radiación al ambiente son despreciables.
- No existe generación de calor en el interior del lecho.
- Se desprecian las pérdidas de calor al ambiente a través del aislante de la pared.

En este trabajo, a diferencia del estudio de Rady [3], se tiene en cuenta la energía almacenada en las paredes del lecho, para lo cual deberá resolverse adicionalmente a las ecuaciones del aire y el sólido, las ecuaciones de la energía para la pared.

### 2.2.1 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL FLUIDO

La ecuación de conservación de la energía para el fluido que rodea las partículas sólidas del lecho es:

$$\rho_a \epsilon c_{p,a} \frac{\partial T}{\partial t} = \epsilon k_{a,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_a p (\theta - T) + h_w a_{w,b} (\phi - T) - \rho_a \epsilon c_{p,a} u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$



Donde:

- $\rho_a$  es la densidad del fluido.
- $c_{p,a}$  es el calor específico del fluido.
- $\varepsilon$  es la porosidad o fracción de vacío del lecho. La porosidad varía en función del tipo de partícula y del empaquetamiento del lecho. Puede expresarse de esta forma:

$$\varepsilon = \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen total}} \quad (2)$$

- $k_{a,x}$  es la conductividad térmica efectiva del fluido en la dirección axial. Cuya expresión se desarrollará en el punto 5.
- $T$  es la temperatura del fluido.
- $\theta$  es la temperatura del sólido.
- $\phi$  es la temperatura de la pared del lecho.
- $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección entre las partículas sólidas y el fluido.
- $h_w$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el fluido y la pared.
- $a_p$  es el área superficial de las partículas por unidad de volumen del lecho. Definida por la siguiente expresión:

$$a_p = \frac{6 (1 - \varepsilon)}{d_p} \quad (3)$$

- $d_p$  es el diámetro de las partículas del sólido.
- $a_{w,b}$  es el área superficial de la pared interior por unidad de volumen del lecho. Se puede expresar como:

$$a_{w,b} = \frac{4}{d_i} \quad (4)$$

- $d_i$  es el diámetro interno del lecho.

- $u$  es la velocidad intersticial, es decir la velocidad del fluido a través de los poros del lecho y que se puede expresar en función de la velocidad superficial  $u_s$  del siguiente modo:

$$u_s = \varepsilon u \quad (5)$$

Del mismo modo, conociendo la ecuación de continuidad podemos calcular  $u_s$  en función del caudal ( $Q$ ) y el área transversal ( $A$ ):

$$Q = u_s A \quad (6)$$

En la ecuación, el término a la izquierda de la igualdad hace referencia a la cantidad de energía almacenada en el fluido por unidad de volumen.

El primer término a la derecha de la igualdad representa la transferencia de calor por conducción en la dirección axial del lecho. A continuación, se encuentra el término referido a la transferencia de calor por convección entre el fluido y las partículas sólidas del lecho, y el término referido a la transferencia de calor por convección entre el fluido y la pared del contenedor.

Por último, el término que hace alusión a la entalpía neta que se asocia al flujo del fluido.

### 2.2.2 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA EL SÓLIDO

La ecuación de conservación de la energía para el sólido se puede definir como:

$$\rho_s(1 - \varepsilon)c_{p,s}\frac{\partial \theta}{\partial t} = (1 - \varepsilon)k_{s,x}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - ha_p(\theta - T) \quad (7)$$

Donde:

- $\rho_s$  es la densidad del sólido.
- $c_{p,s}$  es el calor específico del sólido.
- $k_{s,x}$  es la conductividad térmica efectiva del sólido en la dirección axial.
- El resto de parámetros se explicaron para la ecuación (1).

En esta expresión, el término a la izquierda de la igualdad hace referencia a la cantidad de energía almacenada en el sólido por unidad de volumen. Tras la igualdad, el primer término representa la transferencia de calor por conducción en dirección axial y por último, se encuentra el término referido a la transferencia de calor por convección entre el fluido y las partículas sólidas del lecho.

### 2.2.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA LA PARED

La ecuación de conservación de la energía para la pared del lecho (acero inoxidable) es la siguiente:

$$\rho_w c_{p,w} \frac{\partial \phi}{\partial t} = k_w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - h_w a_{w,w} (\phi - T) \quad (8)$$

Donde:

- $\rho_w$  es la densidad de la pared.
- $c_{p,w}$  es el calor específico de la pared.
- $k_w$  es la conductividad térmica de la pared.
- $a_{w,w}$  es el área superficial de la pared interior por unidad de volumen de la pared. Definida por esta expresión:

$$a_{w,w} = \frac{4 d_i}{(d_o^2 - d_i^2)} \quad (9)$$

- Siendo  $d_o$  el diámetro exterior del lecho.
- El resto de parámetros se explicaron para la ecuación (1).

Análogamente a las ecuaciones anteriores, el término a la izquierda de la igualdad hace referencia a la energía almacenada en la pared, el primer término de la derecha representa la transferencia de calor en dirección axial y el último término representa la transferencia de calor por convección entre el fluido y la pared del lecho.

## 2.3 CONDICIONES INICIAL Y DE CONTORNO

Para terminar de definir el modelo es necesario fijar una condición inicial y unas condiciones de contorno para la carga y descarga del lecho.

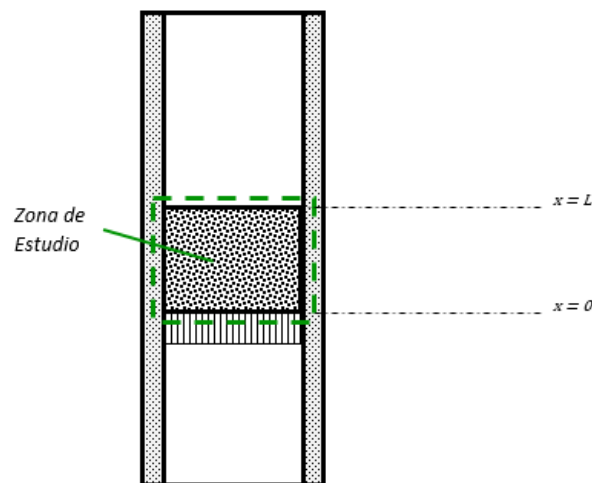
- Condición inicial: establece los datos de partida.

En el instante inicial  $t = 0$  se define una temperatura constante para el sólido, el fluido y la pared igual a la temperatura ambiente  $T_0$ .

$$t = 0 ; T_{t=0} = \theta_{t=0} = \phi_{t=0} = T_0 \quad (10)$$

En el proceso de carga se cumple que en el instante inicial, la temperatura de entrada del fluido es mayor a la temperatura ambiente. Por el contrario, en la descarga del lecho la temperatura de entrada del fluido será menor que la temperatura final del proceso de carga.

- Condiciones de contorno: definen el comportamiento del modelo estableciendo unas fronteras.



**Figura 2. Condiciones de contorno**

- Condiciones de contorno en la entrada del lecho ( $x = 0$ ).

Fluido: en la simulación se toma como temperatura de entrada la temperatura medida experimentalmente en el plenum.

$$T_{x=0} = T_{in} \quad (11)$$

Sólido: en la zona previa a la entrada del lecho no existe sólido por lo que no se intercambia calor.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

Pared: del mismo modo que el sólido.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (13)$$

- Condiciones de contorno a la salida del lecho ( $x = L$ ). Se ha impuesto una condición de contorno de segunda derivada igual a cero que deja libre la pendiente de los perfiles de temperatura a la salida.

Fluido:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (14)$$

Sólido:

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (15)$$

Pared:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (16)$$



### ***3. ADIMENSIONALIZACIÓN Y DISCRETIZACIÓN DEL MODELO***

### 3.1 ADIMENSIONALIZACIÓN

En este proyecto se va a trabajar con expresiones adimensionales. Se conseguirán así términos más compactos y manejables, lo que facilitara la programación en Matlab y los cálculos numéricos.

#### 3.1.1 PARÁMETROS ADIMENSIONALES

Para adimensionalizar las ecuaciones de conservación de la energía se necesitan los siguientes parámetros adimensionales:

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (17)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\theta - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (18)$$

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (19)$$

$$\hat{t} = t \frac{u}{L} \quad (20)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad (21)$$

Donde:

- $\hat{T}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  son las temperaturas adimensionales del fluido, sólido y pared.
- $T_{max}$  es la temperatura máxima del fluido de entrada.
- $T_0$  es la temperatura ambiente.

- $\hat{t}$  es el parámetro adimensionalizado del tiempo.
- $\hat{x}$  es la altura adimensional del lecho (coordenada axial).
- $L$  es la altura del lecho.
- El resto de parámetros se explicaron en el capítulo anterior.

- Adimensionalización de las diferencias  $(\theta - T)$  y  $(\phi - T)$ :

Para completar la adimensionalización de las ecuaciones se necesita tener en forma adimensional las expresiones referentes a la transferencia de calor por convección en el lecho. Para ello se despejan  $T$ ,  $\theta$  y  $\phi$  de los términos (17), (18), (19) y se sustituyen en las diferencias  $(\theta - T)$  y  $(\phi - T)$ .

$$T = \hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0 \quad (22)$$

$$\theta = \hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0 \quad (23)$$

$$\phi = \hat{\phi}(T_{max} - T_0) + T_0 \quad (24)$$

$$(\theta - T) = \hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0 - (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) = (T_{max} - T_0)(\hat{\theta} - \hat{T}) \quad (25)$$

$$(\phi - T) = \hat{\phi}(T_{max} - T_0) + T_0 - (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) = (T_{max} - T_0)(\hat{\phi} - \hat{T}) \quad (26)$$

- Adimensionalización de las derivadas temporales:

Aplicando la regla de la cadena se pueden reescribir las derivadas temporales de primer orden del siguiente modo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \quad (27)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \quad (29)$$

De la expresión (20) se calcula la derivada de  $\hat{t}$ :

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{u}{L} \quad (30)$$

Sustituyendo los términos (22), (23), (24) y (30) se obtiene la expresión adimensional de las derivadas temporales:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{u}{L} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\theta}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{u}{L} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\phi}(T_{max} - T_0) + T_0) \frac{u}{L} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \quad (33)$$

- Adimensionalización de las derivadas espaciales:

Aplicando la regla de la cadena para derivadas espaciales de primer y segundo orden se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (39)$$

Se van a calcular las derivadas espaciales de segundo orden ya que aparecen en las ecuaciones del lecho.

De la expresión (21) se calcula la derivada de  $\hat{x}$ :

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad (40)$$

Sustituyendo los términos (22), (23), (24) y (40) se obtiene la expresión adimensional de las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \hat{T}(T_{max} - T_0) + T_0 \right) \frac{1}{L} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \\ &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2}\end{aligned}\quad (42)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \hat{\theta} (T_{max} - T_0) + T_0 \right) \frac{1}{L} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \\ &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2}\end{aligned}\quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \hat{\phi} (T_{max} - T_0) + T_0 \right) \frac{1}{L} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L}\quad (45)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} \\ &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2}\end{aligned}\quad (46)$$

### 3.1.2 NUMEROS ADIMENSIONALES

Para simplificar las ecuaciones se van a utilizar los números adimensionales de Biot y Fourier.

- Número de Biot: relaciona la transferencia de calor por conducción en el interior de un cuerpo y la transferencia de calor por convección en su superficie.
- Número de Fourier: relaciona la velocidad de conducción de calor y la velocidad a la que se almacena la energía.

- Fluido:

$$Bi_a = \frac{h a_p L^2}{k_{a,x} \varepsilon} \quad (47)$$

$$Fo_a = \frac{\alpha_a}{L u} \quad (48)$$

- Sólido:

$$Bi_s = \frac{h a_p L^2}{k_{s,x} (1 - \varepsilon)} \quad (49)$$

$$Fo_s = \frac{\alpha_s}{L u} \quad (50)$$

- Pared:

$$Bi_w = \frac{h_w a_{w,w} L^2}{k_w} \quad (51)$$

$$Fo_w = \frac{\alpha_w}{L u} \quad (52)$$

$$Bi_{a,w} = \frac{h_w a_{w,b} L^2}{k_{a,x} \varepsilon} \quad (53)$$

- Para la pared del lecho existen dos Biot,  $Bi_{a,w}$  se emplea en la ecuación del fluido y  $Bi_w$  en la de la pared.
- El término  $\alpha$  es la difusividad térmica y se define como:

$$\alpha = \frac{k_x}{\rho c_p} \quad (54)$$

### 3.1.3 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL FLUIDO

Para adimensionalizar la ecuación de conservación de la energía del fluido hay que sustituir las expresiones adimensionales halladas en los puntos anteriores: (25), (26), (31), (41) y (42) en la ecuación del fluido (1). De la siguiente manera:

$$\rho_a \varepsilon c_{p,a} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \varepsilon k_{a,x} (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + h a_p (T_{max} - T_0) (\hat{\theta} - \hat{T}) + h_w a_{w,b} (T_{max} - T_0) (\hat{\phi} - \hat{T}) - \rho_a \varepsilon c_{p,a} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}}$$

Se puede simplificar la expresión anterior dividiendo entre el término que acompaña a la derivada temporal:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \underbrace{\frac{k_{a,x}}{\rho_a c_{p,a} L u}}_I \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \underbrace{\frac{h a_p L}{\rho_a \varepsilon c_{p,a} u}}_{II} (\hat{\theta} - \hat{T}) + \underbrace{\frac{h_w a_{w,b} L}{\rho_a \varepsilon c_{p,a} u}}_{III} (\hat{\phi} - \hat{T}) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}}$$

Con la ayuda de los números adimensionales se reduce la expresión:

$$I) \quad \frac{k_{a,x}}{\rho_a c_{p,a} L u} = Fo_a$$

$$II) \quad \frac{h a_p L}{\rho_a \varepsilon c_{p,a} u} = \frac{\alpha_a}{k_{a,x}} \frac{h a_p L}{\varepsilon u} = \frac{h a_p L^2}{k_{a,x} \varepsilon} Fo_a = Bi_a Fo_a$$

$$III) \quad \frac{h_w a_{w,b} L}{\rho_a \varepsilon c_{p,a} u} = \frac{\alpha_a}{k_{a,x}} \frac{h_w a_{w,b} L}{\varepsilon u} = \frac{h_w a_{w,b} L^2}{k_{a,x} \varepsilon} Fo_a = Bi_{a,w} Fo_a$$

Por último, la ecuación del fluido adimensionalizada es la siguiente:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = Fo_a \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta} - \hat{T}) + Bi_{a,w} Fo_a (\hat{\phi} - \hat{T}) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}}$$

(55)

### 3.1.4 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL SÓLIDO

Siguiendo el desarrollo del apartado anterior, para adimensionalizar la ecuación del sólido hay que sustituir las expresiones adimensionales (25), (32) y (44) en la ecuación del sólido (7). De la siguiente manera:

$$\rho_s(1 - \varepsilon)c_{p,s}(T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = (1 - \varepsilon)k_{s,x}(T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - ha_p(T_{max} - T_0)(\hat{\theta} - \hat{T})$$

Del mismo modo se simplifica la expresión anterior dividiendo entre el término que acompaña a la derivada temporal:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = \underbrace{\frac{k_{s,x}}{\rho_s c_{p,s} L u}}_I \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - \underbrace{\frac{ha_p L}{\rho_s(1 - \varepsilon)c_{p,s} u}}_{II} (\hat{\theta} - \hat{T})$$

Se reduce la expresión:

$$I) \quad \frac{k_{s,x}}{\rho_s c_{p,s} L u} = Fo_s$$

$$II) \quad \frac{ha_p L}{\rho_s(1 - \varepsilon)c_{p,s} u} = \frac{\alpha_s}{k_{s,x}} \frac{ha_p L}{(1 - \varepsilon)u} = \frac{ha_p L^2}{k_{s,x}(1 - \varepsilon)} Fo_a = Bi_s Fo_s$$

Finalmente, la ecuación adimensionalizada del sólido es:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = Fo_s \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta} - \hat{T})$$

(56)

### 3.1.5 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA PARED

Análogamente a las anteriores ecuaciones, se sustituyen las expresiones adimensionales (26), (33) y (46) en la ecuación de la pared (8). De la siguiente manera:

$$\rho_w c_{p,w} (T_{max} - T_0) \frac{u}{L} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} = k_w (T_{max} - T_0) \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} - h_w a_{w,w} (T_{max} - T_0) (\hat{\phi} - \hat{T})$$

Como se ha hecho anteriormente se simplifica la expresión dividiendo entre el término que acompaña a la derivada temporal:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = \underbrace{\frac{k_w}{\rho_w c_{p,w} L u}}_I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} - \underbrace{\frac{h_w a_{w,w} L}{\rho_w c_{p,w} u}}_{II} (\hat{\phi} - \hat{T})$$

De nuevo se reduce la expresión:

$$I) \quad \frac{k_w}{\rho_w c_{p,w} L u} = Fo_w$$

$$II) \quad \frac{h_w a_{w,w} L}{\rho_w c_{p,w} u} = \frac{\alpha_w}{k_w} \frac{h_w a_{w,w} L}{u} = \frac{h_w a_{w,w} L^2}{k_w} Fo_w = Bi_w Fo_w$$

Al final, se obtiene la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = Fo_w \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w (\hat{\phi} - \hat{T})$$

(57)

### 3.1.6 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE COTORNO

- Condición inicial adimensional:

Partiendo de la condición inicial del apartado 2.3, donde:

$$\text{Para } t = 0 \rightarrow T = \theta = \phi = T_0$$

Si se sustituye el valor de  $T$ ,  $\theta$  y  $\phi$  en las expresiones (17), (18) y (19) queda:

$$\hat{T} = 0$$

$$\hat{\theta} = 0$$

$$\hat{\phi} = 0$$

Con lo que:

$$\text{Para } \hat{t} = 0 \rightarrow \hat{T}_{\hat{t}=0} = \hat{\theta}_{\hat{t}=0} = \hat{\phi}_{\hat{t}=0} = 0 \quad (58)$$

- Condiciones de contorno adimensionales:

Para  $\hat{x} = 0$ :

$$\text{Fluido} \rightarrow T_{x=0} = T_{in} \rightarrow \hat{T}_{\hat{x}=0} = \frac{T_{in} - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (59)$$



$$\text{Sólido} \rightarrow \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (60)$$

$$\text{Pared} \rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 \quad (61)$$

Para  $\hat{x} = 1$ :

$$\text{Fluido} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (62)$$

$$\text{Sólido} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (63)$$

$$\text{Pared} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (64)$$

## 3.2 DISCRETIZACIÓN

Con los desarrollos anteriores se tienen ya planteadas y adimensionalizadas las ecuaciones de conservación de la energía y las condiciones de contorno. Ahora, para poder resolver el problema hay que aplicar un método numérico a un sistema algebraico de ecuaciones. Este sistema de ecuaciones se obtiene discretizando las ecuaciones adimensionales que se encuentran en derivadas parciales.

El primer paso consiste en discretizar el dominio y después, discretizar las derivadas espaciales y temporales.

### 3.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

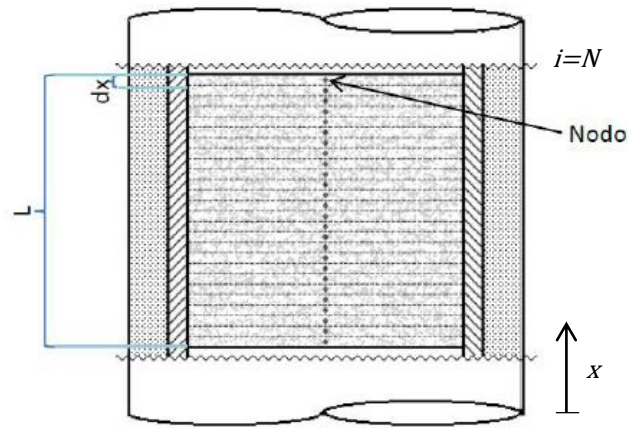
Discretizar el dominio consiste en seleccionar aquellos puntos del lecho en los que se van a resolver las ecuaciones. Para ello, se divide el medio de interés en pequeñas regiones dotando a cada una de ellas de un punto de referencia centrado. Cada punto se conoce como nodo y la suma de todos ellos se denomina malla.

Se tiene de esta manera el dominio dividido en puntos o regiones y en cada una de ellas hay una temperatura diferente que será la medida promedio de dicha región.

Cuanto mayor sea el número de nodos, más fina será la malla y por lo tanto, más preciso será el resultado. Pero se debe llegar a un acuerdo entre las soluciones y el tiempo de cómputo, ya que el método se resuelve en el software matemático Matlab.

En este caso, se desprecia la conducción en dirección radial, por lo tanto la discretización del lecho se hará en la dirección axial.

Se divide la zona de estudio del lecho de altura  $L$  en regiones de altura  $dx$  dispuestas verticalmente y cada una de ellas como se ha explicado anteriormente contendrá un nodo en su centro. La discretización del dominio se representa en la siguiente figura:



**Figura 3. Discretización del lecho**

### 3.2.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones del fluido, sólido y pared contienen derivadas parciales tanto de primer como de segundo orden, como ya se vio en el capítulo 2.

Para la aproximación de las derivadas parciales se va a emplear un esquema de diferencias finitas.

- Discretización de las derivadas espaciales de primer orden: se emplea el esquema de diferencia regresiva, que tiene como condición que la temperatura del anterior nodo sea conocida.

$$\frac{\partial \hat{T}_i}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{T}_i^j - \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}} \quad (65)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{\theta}_i^j - \hat{\theta}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}} \quad (66)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{\phi}_i^j - \hat{\phi}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}} \quad (67)$$

Donde el subíndice  $i$  se refiere al nodo en el que se está calculando la temperatura, el subíndice  $i - 1$  hace referencia al anterior nodo y  $\Delta \hat{x}$  a la distancia adimensional entre nodos en la dirección axial.

- Discretización de las derivadas espaciales de segundo orden: se emplea el esquema de diferencia centrada.

$$\frac{\partial^2 \hat{T}_i}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{T}_{i+1}^j - 2\hat{T}_i^j + \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}_i}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{\theta}_{i+1}^j - 2\hat{\theta}_i^j + \hat{\theta}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{\phi}_{i+1}^j - 2\hat{\phi}_i^j + \hat{\phi}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} \quad (70)$$

### 3.2.3 DISCRETIZACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIAL Y DE CONTORNO.

Del mismo modo, en la entrada y salida del lecho hay que discretizar las condiciones de contorno.

- Discretización de la condición inicial en  $\hat{t} = 0$ :

$$\hat{T}_{i=1\dots N}^{j=1} = \hat{\theta}_{i=1\dots N}^{j=1} = \hat{\phi}_{i=1\dots N}^{j=1} = 0 \quad (71)$$

- Discretización de la condición de contorno en  $\hat{x} = 0$ :

$$\hat{T}_{i=1}^{j=1} = \frac{T_{in} - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (72)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 \rightarrow \frac{\hat{\theta}_{i=2}^j - \hat{\theta}_{i=1}^j}{\Delta \hat{x}} = 0 \rightarrow \hat{\theta}_{i=2}^j - \hat{\theta}_{i=1}^j = 0 \rightarrow \hat{\theta}_{i=2}^j = \hat{\theta}_{i=1}^j \quad (73)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0 \rightarrow \frac{\hat{\phi}_{i=2}^j - \hat{\phi}_{i=1}^j}{\Delta \hat{x}} = 0 \rightarrow \hat{\phi}_{i=2}^j - \hat{\phi}_{i=1}^j = 0 \rightarrow \hat{\phi}_{i=2}^j = \hat{\phi}_{i=1}^j \quad (74)$$

- Discretización de la condición de contorno en  $\hat{x} = 1$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (75)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (76)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0 \quad (77)$$

### 3.3 ECUACIONES ADIMENSIONALIZADAS Y DISCRETIZADAS

Las ecuaciones discretizadas quedan:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = Fo_a \frac{\hat{T}_{i+1}^j - 2\hat{T}_i^j + \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta}_i^j - \hat{T}_i^j) - \frac{\hat{T}_i^j + \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a (\hat{\phi}_i^j - \hat{T}_i^j)$$

(78)

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} = Fo_s \frac{\hat{\theta}_{i+1}^j - 2\hat{\theta}_i^j + \hat{\theta}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta}_i^j - \hat{T}_i^j)$$

(79)

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = Fo_w \frac{\hat{\phi}_{i+1}^j - 2\hat{\phi}_i^j + \hat{\phi}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w (\hat{\phi}_i^j - \hat{T}_i^j)$$

(80)

Y las condiciones iniciales y de contorno:

- Condición inicial:

$$\hat{T}_{i=1\dots N}^{j=1} = \hat{\theta}_{i=1\dots N}^{j=1} = \hat{\phi}_{i=1\dots N}^{j=1} = 0$$

- Condición de contorno en  $\hat{x} = 0$

$$\hat{T}_{i=1}^{j=1} = \frac{T_{in} - T_0}{T_{max} - T_0}$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = 0$$

- Condición de contorno en  $\hat{x} = 1$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=1} = 0$$



## ***4. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA***



## 4.1 DESARROLLO DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

Para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales se va a implementar el método de Runge-Kutta, es un método iterativo que obtiene una aproximación de la solución  $w_{i+1}$  en un punto conociendo la aproximación de la solución  $w_i$  en el punto anterior, (Burden y Faires [4]).

En las ecuaciones del punto anterior se observa que para el cálculo de la temperatura del fluido es necesario conocer la temperatura del sólido y de la pared. Y para hallar la temperatura del sólido o de la pared se necesita conocer la del fluido. Por esta razón, el método matemático tiene que ser capaz de resolver simultáneamente la temperatura de cada nodo para cada una de las fases.

Generalmente se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden, que viene dado por la siguiente expresión:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$\begin{cases} K_1 = f(t_i, w_i) \\ K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(t_i + h, w_i + hK_3) \end{cases} \quad (81)$$

Donde:

- $h$  es el intervalo de tiempo.
- $K_1$  es la pendiente al inicio del intervalo.
- $K_2$  y  $K_3$  son las pendientes en el punto medio del intervalo.
- $K_4$  es la pendiente al final del intervalo.

Las  $K$  mantienen una relación de concurrencia, para calcular  $K_{2...4}$  se necesita el valor de la anterior.

La pendiente estimada es un promedio de las cuatro pendientes, de esta forma:

$$Pendiente = \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

De acuerdo con el texto de Burden y Faires [4], la expresión (81) puede generalizarse para sistemas de ecuaciones del siguiente modo:

$$\begin{aligned}K_{1,i} &= f_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}) \\K_{2,i} &= f_i(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}K_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}K_{1,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}K_{1,m}) \\K_{3,i} &= f_i(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}K_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}K_{2,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}K_{2,m}) \\K_{4,i} &= f_i(t_j + h, w_{1,j} + K_{3,1}, w_{2,j} + K_{3,2}, \dots, w_{m,j} + K_{3,m})\end{aligned}$$

Entonces:

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}h(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i})$$

De modo que el proceso permite conocer el próximo valor  $w_{i+1}$  partiendo del valor actual  $w_i$  más el producto de la pendiente estimada por intervalo de tiempo.

Finalmente, mediante la implementación del método de Runge-Kutta se pueden expresar las derivadas temporales de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \approx \frac{1}{6}(K_{T_1} + 2K_{T_2} + 2K_{T_3} + K_{T_4}) \quad (82)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} \approx \frac{1}{6}(K_{\theta_1} + 2K_{\theta_2} + 2K_{\theta_3} + K_{\theta_4}) \quad (83)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} \approx \frac{1}{6}(K_{\phi_1} + 2K_{\phi_2} + 2K_{\phi_3} + K_{\phi_4}) \quad (84)$$

Se aproximan las derivadas parciales empleando un esquema explícito, en el que para conocer la temperatura de un nodo en el instante  $j + 1$  se necesita el valor de la temperatura calculada en ese nodo el instante anterior  $j$ . Según la expresión:

$$\hat{T}_i^{j+1} = \hat{T}_i^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{T_{1,i}} + 2K_{T_{2,i}} + 2K_{T_{3,i}} + K_{T_{4,i}}) \quad (85)$$

$$\hat{\theta}_i^{j+1} = \hat{\theta}_i^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{\theta_{1,i}} + 2K_{\theta_{2,i}} + 2K_{\theta_{3,i}} + K_{\theta_{4,i}}) \quad (86)$$

$$\hat{\phi}_i^{j+1} = \hat{\phi}_i^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{\phi_{1,i}} + 2K_{\phi_{2,i}} + 2K_{\phi_{3,i}} + K_{\phi_{4,i}}) \quad (87)$$

A partir de estas expresiones se van a plantear diferentes sistemas de 'N' ecuaciones para las temperaturas del fluido, sólido y pared que corresponden a los 'N' nodos en los que se divide el lecho.

Se tienen por lo tanto tres sistemas de 'N' ecuaciones con 'N' incógnitas, en uno se almacenan las temperaturas del fluido, en otro las del sólido y por último las de la pared.

De este modo para cada nodo las ecuaciones se desarrollan así:

Fluido:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^{j+1} &= \hat{T}_1^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{T_{1,1}} + 2K_{T_{2,1}} + 2K_{T_{3,1}} + K_{T_{4,1}}) \\ \hat{T}_2^{j+1} &= \hat{T}_2^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{T_{1,2}} + 2K_{T_{2,2}} + 2K_{T_{3,2}} + K_{T_{4,2}}) \\ &\vdots \\ \hat{T}_N^{j+1} &= \hat{T}_N^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{T_{1,N}} + 2K_{T_{2,N}} + 2K_{T_{3,N}} + K_{T_{4,N}}) \end{aligned}$$

Sólido:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1^{j+1} &= \hat{\theta}_1^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Theta_{1,1}} + 2K_{Theta_{2,1}} + 2K_{Theta_{3,1}} + K_{Theta_{4,1}}) \\ \hat{\theta}_2^{j+1} &= \hat{\theta}_2^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Theta_{1,2}} + 2K_{Theta_{2,2}} + 2K_{Theta_{3,2}} + K_{Theta_{4,2}}) \\ &\vdots \\ \hat{\theta}_N^{j+1} &= \hat{\theta}_N^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Theta_{1,N}} + 2K_{Theta_{2,N}} + 2K_{Theta_{3,N}} + K_{Theta_{4,N}})\end{aligned}$$

Pared:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1^{j+1} &= \hat{\phi}_1^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Phi_{1,1}} + 2K_{Phi_{2,1}} + 2K_{Phi_{3,1}} + K_{Phi_{4,1}}) \\ \hat{\phi}_2^{j+1} &= \hat{\phi}_2^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Phi_{1,2}} + 2K_{Phi_{2,2}} + 2K_{Phi_{3,2}} + K_{Phi_{4,2}}) \\ &\vdots \\ \hat{\phi}_N^{j+1} &= \hat{\phi}_N^j + \frac{\Delta \hat{t}}{6} (K_{Phi_{1,N}} + 2K_{Phi_{2,N}} + 2K_{Phi_{3,N}} + K_{Phi_{4,N}})\end{aligned}$$

Para el cálculo de las  $K$  se va a diferenciar entre el segundo y último nodo que vienen definidos por las condiciones de contorno y el resto de nodos ( $i = 3:N - 1$ ) que siguen el siguiente esquema:

Fluido:

$$K_{T_{1,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{\hat{T}_{i+1}^j - 2\hat{T}_i^j + \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta}_i^j - \hat{T}_i^j) - \frac{\hat{T}_i^j - \hat{T}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a (\hat{\phi}_i^j - \hat{T}_i^j) \right]$$

$$K_{T_{2,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_{i+1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i+1}}) - 2(\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i}}) + (\hat{T}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,i}}) - \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i}}) \right) - \frac{(\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i}}) - (\hat{T}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i-1}})}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,i}}) - (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i}}) \right) \right]$$

$$K_{T_{3,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_{i+1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i+1}}) - 2(\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i}}) + (\hat{T}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,i}}) - \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i}}) \right) - \frac{(\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i}}) - (\hat{T}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i-1}})}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,i}}) - (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i}}) \right) \right]$$

$$K_{T_{4,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_{i+1}^j + K_{T_{3,i+1}}) - 2(\hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}}) + (\hat{T}_{i-1}^j + K_{T_{3,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_i^j + K_{Theta_{3,i}}) - (\hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}}) \right) - \right. \\ \left. \frac{(\hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}}) - (\hat{T}_{i-1}^j + K_{T_{3,i-1}})}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_i^j + K_{Phi_{3,i}}) - (\hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}}) \right) \right]$$

Sólido:

$$K_{Theta_{1,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{\hat{\theta}_{i+1}^j - 2\hat{\theta}_i^j + \hat{\theta}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta}_i^j - \hat{T}_i^j) \right]$$

$$K_{Theta_{2,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_{i+1}^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,i+1}}) - 2(\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,i}}) + (\hat{\theta}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,i}}) - \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,i}}) \right) \right]$$

$$K_{Theta_{3,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_{i+1}^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,i+1}}) - 2(\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,i}}) + (\hat{\theta}_{i-1}^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_i^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,i}}) - \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{T}_i^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,i}}) \right) \right]$$

$$K_{Theta_{4,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_{i+1}^j + K_{Theta_{3,i+1}}) - 2(\hat{\theta}_i^j + K_{Theta_{3,i}}) + (\hat{\theta}_{i-1}^j + K_{Theta_{3,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_i^j + K_{Theta_{3,i}}) - \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}}) \right) \right]$$

Pared:

$$K_{Phi_{1,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{\hat{\phi}_{i+1}^j - 2\hat{\phi}_i^j + \hat{\phi}_{i-1}^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w (\hat{\phi}_i^j - \hat{T}_i^j) \right]$$

$$K_{Phi_{2,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_{i+1}^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{1,i+1}}) - 2(\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{1,i}}) + (\hat{\phi}_{i-1}^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{1,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{1,i}}) - \left( \hat{T}_i^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,i}} \right) \right) \right]$$

$$K_{Phi_{3,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_{i+1}^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{2,i+1}}) - 2(\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{2,i}}) + (\hat{\phi}_{i-1}^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{2,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_i^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{2,i}}) - \left( \hat{T}_i^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,i}} \right) \right) \right]$$

$$K_{Phi_{4,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_{i+1}^j + K_{Phi_{3,i+1}}) - 2(\hat{\phi}_i^j + K_{Phi_{3,i}}) + (\hat{\phi}_{i-1}^j + K_{Phi_{3,i-1}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_i^j + K_{Phi_{3,i}}) - \left( \hat{T}_i^j + K_{T_{3,i}} \right) \right) \right]$$

Para el segundo nodo ( $i = 2$ ) las expresiones son:

Fluido: sabiendo que en el nodo 1,  $\hat{T}_{i=1} = T_{in}$

$$K_{T_{1,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{\hat{T}_3^j - 2\hat{T}_2^j + \hat{T}_{in}^j}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a (\hat{\theta}_2^j - \hat{T}_2^j) - \frac{\hat{T}_2^j - \hat{T}_{in}^j}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a (\hat{\phi}_2^j - \hat{T}_2^j) \right]$$

$$K_{T_{2,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_3^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,3}}) - 2(\hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,2}}) + \left( \frac{\hat{T}_{in}^j + \hat{T}_{in}^{j+1}}{2} \right)}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2}K_{Theta_{1,2}}) - \left( \hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,2}} \right) \right) - \frac{(\hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,2}}) - \left( \frac{\hat{T}_{in}^j + \hat{T}_{in}^{j+1}}{2} \right)}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{1,2}}) - \left( \hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{1,2}} \right) \right) \right]$$

$$K_{T_{3,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_3^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,3}}) - 2(\hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,2}}) + \left( \frac{\hat{T}_{in}^j + \hat{T}_{in}^{j+1}}{2} \right)}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2}K_{Theta_{2,2}}) - \left( \hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,2}} \right) \right) - \frac{(\hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,2}}) - \left( \frac{\hat{T}_{in}^j + \hat{T}_{in}^{j+1}}{2} \right)}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2}K_{Phi_{2,2}}) - \left( \hat{T}_2^j + \frac{1}{2}K_{T_{2,2}} \right) \right) \right]$$

$$K_{T_{4,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_a \frac{(\hat{T}_3^j + K_{T_{3,3}}) - 2(\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) + (\hat{T}_{in}^{j+1})}{\Delta \hat{x}^2} + Bi_a Fo_a \left( (\hat{\theta}_2^j + K_{Theta_{3,2}}) - (\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) \right) - \frac{(\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) - (\hat{T}_{in}^{j+1})}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a \left( (\hat{\phi}_2^j + K_{Phi_{3,2}}) - (\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) \right) \right]$$

Sólido: sabiendo que en el nodo 1,  $\hat{\theta}_{i=2}^j = \hat{\theta}_{i=1}^j$

$$K_{Theta_{1,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{\hat{\theta}_3^j - \hat{\theta}_2^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s (\hat{\theta}_2^j - \hat{T}_2^j) \right]$$

$$K_{Theta_{2,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_3^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,3}}) - (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,2}}) - (\hat{T}_2^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,2}}) \right) \right]$$

$$K_{Theta_{3,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_3^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,3}}) - (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_2^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,2}}) - (\hat{T}_2^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,2}}) \right) \right]$$

$$K_{Theta_{4,i}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_s \frac{(\hat{\theta}_3^j + K_{Theta_{3,3}}) - (\hat{\theta}_2^j + K_{Theta_{3,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_s Fo_s \left( (\hat{\theta}_2^j + K_{Theta_{3,2}}) - (\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) \right) \right]$$

Pared: sabiendo que en el nodo 1,  $\hat{\phi}_{i=2}^j = \hat{\phi}_{i=1}^j$

$$K_{Phi_{1,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{\hat{\phi}_3^j - \hat{\phi}_2^j}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w (\hat{\phi}_2^j - \hat{T}_2^j) \right]$$

$$K_{Phi_{2,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_3^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,3}}) - (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,2}}) - (\hat{T}_2^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,2}}) \right) \right]$$

$$K_{Phi_{3,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_3^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,3}}) - (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_2^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,2}}) - (\hat{T}_2^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,2}}) \right) \right]$$

$$K_{Phi_{4,2}} = \Delta \hat{t} \left[ Fo_w \frac{(\hat{\phi}_3^j + K_{Phi_{3,3}}) - (\hat{\phi}_2^j + K_{Phi_{3,2}})}{\Delta \hat{x}^2} - Bi_w Fo_w \left( (\hat{\phi}_2^j + K_{Phi_{3,2}}) - (\hat{T}_2^j + K_{T_{3,2}}) \right) \right]$$

Para el último nodo ( $i = N$ ) ya que las condiciones de contorno son:

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} = 0, \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} = 0, \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} = 0$$

Fluido:

$$K_{T_{1,N}} = \Delta \hat{t} \left[ Bi_a Fo_a (\hat{\theta}_N^j - \hat{T}_N^j) - \frac{\hat{T}_N^j - \hat{T}_{N-1}^j}{\Delta \hat{x}} + Bi_{a,w} Fo_a (\hat{\phi}_N^j - \hat{T}_N^j) \right]$$

$$K_{T_{2,N}} = \Delta \hat{t} \left[ Bi_a Fo_a \left( \left( \hat{\theta}_N^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N}} \right) \right) - \frac{(\hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N}}) - (\hat{T}_{N-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N-1}})}{\Delta \hat{x}} + \right. \\ \left. Bi_{a,w} Fo_a \left( \left( \hat{\phi}_N^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N}} \right) \right) \right]$$

$$K_{T_{3,N}} = \Delta \hat{t} \left[ Bi_a Fo_a \left( \left( \hat{\theta}_N^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N}} \right) \right) - \frac{(\hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N}}) - (\hat{T}_{N-1}^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N-1}})}{\Delta \hat{x}} + \right. \\ \left. Bi_{a,w} Fo_a \left( \left( \hat{\phi}_N^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N}} \right) \right) \right]$$

$$K_{T_{4,N}} = \Delta \hat{t} \left[ Bi_a Fo_a \left( \left( \hat{\theta}_N^j + K_{Theta_{3,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + K_{T_{3,N}} \right) \right) - \frac{(\hat{T}_N^j + K_{T_{3,N}}) - (\hat{T}_{N-1}^j + K_{T_{3,N-1}})}{\Delta \hat{x}} + \right. \\ \left. Bi_{a,w} Fo_a \left( \left( \hat{\phi}_N^j + K_{Phi_{3,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + K_{T_{3,N}} \right) \right) \right]$$

Sólido:

$$K_{Theta_{1,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_s Fo_s (\hat{\theta}_N^j - \hat{T}_N^j)]$$

$$K_{Theta_{2,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_s Fo_s \left( \left( \hat{\theta}_N^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{1,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N}} \right) \right)]$$

$$K_{Theta_{3,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_s Fo_s \left( \left( \hat{\theta}_N^j + \frac{1}{2} K_{Theta_{2,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N}} \right) \right)]$$

$$K_{Theta_{4,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_s Fo_s \left( \left( \hat{\theta}_N^j + K_{Theta_{3,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + K_{T_{3,N}} \right) \right)]$$

Pared:

$$K_{Phi_{1,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_w Fo_w (\hat{\phi}_N^j - \hat{T}_N^j)]$$

$$K_{Phi_{2,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_w Fo_w \left( \left( \hat{\phi}_N^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{1,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{1,N}} \right) \right)]$$

$$K_{Phi_{3,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_w Fo_w \left( \left( \hat{\phi}_N^j + \frac{1}{2} K_{Phi_{2,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + \frac{1}{2} K_{T_{2,N}} \right) \right)]$$

$$K_{Phi_{4,N}} = \Delta \hat{t} [-Bi_w Fo_w \left( \left( \hat{\phi}_N^j + K_{Phi_{3,N}} \right) - \left( \hat{T}_N^j + K_{T_{3,N}} \right) \right)]$$





## ***5. CORRELACIONES***

Mediante el uso de una serie de correlaciones se van a calcular los coeficientes de transferencia de calor por convección y las conductividades térmicas efectivas del sólido y del fluido.

Para hallar estos parámetros se suelen emplear correlaciones empíricas que aplican los resultados de las ecuaciones de conservación de la energía, ajustados con parámetros obtenidos de los experimentos.

## 5.1 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

En el lecho tiene lugar el intercambio de calor por convección entre el fluido y las partículas y entre la pared del lecho y el fluido. Por este motivo se van a utilizar distintas correlaciones para el cálculo de cada coeficiente.

### 5.1.1 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA ENTRE LAS PARTÍCULAS Y EL FLUIDO ( $h$ )

Para calcular el coeficiente de transferencia de calor entre el fluido y las partículas del lecho se va a emplear una correlación referida al número de Nusselt. Existen numerosas correlaciones para obtener dicho número, pero según el texto de Ismail y Stuginsky [5] todas aportan resultados similares.

En este caso se va a emplear la correlación extraída del texto de Galloway y Sage [6] según la cual el número de Nusselt se puede expresar como:

$$Nu_{dp,h} = 2 + C_1 Re_{dp}^{0.5} Pr^{1/3} + C_2 Re_{dp} Pr^{0.5} \quad (88)$$

$$\text{Donde } \begin{cases} C_1 = 2.031 \\ C_2 = 0.049 \end{cases}$$

También aparecen en esta correlación el número de Reynolds referido al diámetro de las partículas ( $Re_{dp}$ ) y el número de Prandtl ( $Pr$ ) que se definen como:

$$Re_{dp} = \frac{u_s d_p}{\nu} \quad (89)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (90)$$

Siendo  $\alpha$  la difusividad térmica, definida en la expresión (54)

El término  $\nu$  hace referencia a la viscosidad cinemática del fluido, que se define como el cociente entre la viscosidad dinámica ( $\mu$ ) y la densidad del fluido ( $\rho$ ):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (91)$$

Finalmente, se calcula el coeficiente de transferencia de calor entre el sólido y el fluido empleando el número de Nusselt (88), la conductividad térmica del fluido ( $k_a$ ) y el diámetro de las partículas sólidas ( $d_p$ ):

$$h = \frac{Nu_{dp,h} k_a}{d_p} \quad (92)$$

### 5.1.2 COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA ENTRE LA PARED DEL LECHO Y EL FLUIDO ( $h_w$ )

Del mismo modo que en el punto anterior, para calcular el coeficiente de transferencia de calor entre la pared interior del lecho y el fluido se va a emplear una correlación que hace referencia al número de Nusselt. En concreto la que aparece en el texto de Ismail y Stuginsky [5], ya que es un caso de convección forzada en flujo interno.

$$Nu_{dp,hw} = 2.576 Re_{dp}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.0936 Re_{dp}^{0.8} Pr^{0.4} \quad (93)$$

$$h_w = \frac{Nu_{dp,hw} k_a}{d_p} \quad (94)$$

## 5.2 CONDUCTIVIDAD TÉRMICA EFECTIVA

Generalmente los mecanismos de transferencia de calor que tienen lugar en un lecho de almacenamiento térmico son conducción, convección y radiación. Estos mecanismos se suelen englobar en un único parámetro conocido como conductividad térmica efectiva.

El texto [5] basándose en las expresiones sugeridas por los textos de Wakao y Kaguei [7] establece que la conductividad térmica efectiva en la dirección axial del lecho se puede calcular como:

$$k_{a,x} \begin{cases} 0.7k_a & Re_{dp} \leq 0.8 \\ \frac{0.5PrRe_{dp}k_a}{\varepsilon} & Re_{dp} > 0.8 \end{cases} \quad (95)$$

$$k_{s,x} = \frac{k_e^0 + 0.5PrRe_{dp}k_s - \varepsilon k_{a,x}}{(1 - \varepsilon)} \quad (96)$$

Como se observa para calcular la conductividad térmica efectiva del sólido ( $k_{s,x}$ ) es necesario conocer el valor de la conductividad térmica efectiva del fluido ( $k_{a,x}$ ).

Donde:

- $k_a$  es la conductividad térmica del aire
- $k_s$  es la conductividad térmica del sólido
- $k_e^0$  es la conductividad térmica efectiva estática, que se puede definir como:

$$\frac{k_e^0}{k_a} = \left(\frac{k_s}{k_a}\right)^m \quad (97)$$

Siendo:

$$m = 0.280 - 0.757 \log(\varepsilon) - 0.057 \log\left(\frac{k_s}{k_a}\right) \quad (98)$$



## ***6. RESULTADOS***

A partir del software de programación matemática Matlab, se van a resolver los sistemas matriciales compuestos por las ecuaciones que describen el proceso de transferencia de calor para el almacenamiento de energía térmica en un lecho fijo. Estas ecuaciones como ya se ha visto en los puntos anteriores han sido adimensionalizadas y discretizadas para su posterior resolución mediante el método numérico de Runge-Kutta.

De esta manera se obtiene la evolución de las temperaturas del fluido, sólido y pared a lo largo del lecho en función del tiempo. Además se estudiará la influencia de la energía almacenada en la pared.

También se compararán todos los resultados de la simulación con las medidas experimentales que realizó el Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid.

## 6.1 CÁLCULO DE PARÁMETROS NECESARIOS PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para empezar, se van a detallar los aspectos geométricos y físicos del lecho, y las propiedades térmicas del fluido, sólido y pared.

A continuación, se calcularán parámetros como los coeficientes de transferencia de calor y las conductividades térmicas efectivas, necesarios para la simulación.

Todos los materiales del lecho y los datos referentes a la geometría empleados para la simulación son los mismos que los que componen el lecho real utilizado en los experimentos.

La geometría del lecho está determinada por las siguientes características:

Diámetro interior del lecho	$d_i = 0.200 \text{ m}$
Diámetro exterior del lecho	$d_o = 0.204 \text{ m}$
Altura del lecho	$L = 0.200 \text{ m}$
Diámetro exterior del aislante	$d_{aisl} = 0.234 \text{ m}$

***Tabla 1. Características referentes a la geometría del lecho***

La pared del lecho de espesor ( $d_o - d_i$ ) está formada de acero inoxidable AISI 304 y tiene las siguientes propiedades:

Calor específico	$c_{p,w} = 477 \text{ J/KgK}$
Densidad	$\rho_w = 7900 \text{ Kg/m}^3$
Conductividad térmica	$k_w = 14.9 \text{ W/mK}$

**Tabla 2. Propiedades térmicas de la pared**

El material del aislante que recubre el exterior del lecho es fibra de vidrio y sus propiedades son:

Calor específico	$c_{p,aisl} = 835 \text{ J/KgK}$
Densidad	$\rho_{aisl} = 32 \text{ Kg/m}^3$
Conductividad térmica	$k_{aisl} = 0.038 \text{ W/mK}$

**Tabla 3. Propiedades térmicas del aislante**

El fluido de trabajo que atraviesa el lecho es aire y sus propiedades son:

Calor específico	$c_{p,a} = 1012 \text{ J/KgK}$
Densidad	$\rho_a = 1.18 \text{ Kg/m}^3$
Conductividad térmica	$k_a = 0.02624 \text{ W/mK}$
Viscosidad	$\mu_a = 1.8462 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/ms}$

**Tabla 4. Propiedades térmicas del fluido**

El material sólido que forma el lecho fijo es arena, cuyas propiedades son:

Calor específico	$c_{p,s} = 920 \text{ J/KgK}$
Densidad	$\rho_s = 2600 \text{ Kg/m}^3$
Conductividad térmica	$k_s = 1.28 \text{ W/mK}$
Diámetro de las partículas	$d_p = 1.12 \text{ mm}$
Porosidad del lecho	$\varepsilon = 0.4$

**Tabla 5. Propiedades térmicas de las partículas sólidas**

El caudal de aire que circula a través del lecho es  $485 \text{ l/min}$ , es por lo tanto menor que el caudal de mínima fluidización ( $622 \text{ l/min}$ ) que corresponde a una velocidad de entrada del fluido de  $0.33 \text{ m/s}$ . El valor del caudal es el mismo que se utilizó en los experimentos realizados por el Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos.

Inicialmente la temperatura del lecho se supone igual a la temperatura ambiente, y la temperatura de entrada del fluido es variable con respecto al tiempo.

### 6.1.1 CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Una vez que se han definido las propiedades térmicas del sólido y del fluido se procede al cálculo de los números adimensionales de Reynolds ( $Re_{dp}$ ) y Prandtl ( $Pr$ ), necesarios para hallar los coeficientes de transferencia de calor.

A partir de las expresiones (89) y (90) se obtiene:

$$Re_{dp} = \frac{u_s d_p}{\nu} = \frac{4Q d_p \rho_a}{\pi d_i^2 \mu_a} = \frac{4 \cdot 485 \cdot 0.00112 \cdot 1.18}{60 \cdot 1000 \cdot \pi \cdot 0.2^2 \cdot 1.8462 \cdot 10^{-5}} = 18.4188$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu_a c_{p,a}}{k_a} = \frac{1.8462 \cdot 10^{-5} \cdot 1012}{0.02624} = 0.7120$$

- Coeficiente de transferencia de calor entre las partículas y el fluido ( $h$ )

Utilizando la expresión (88) se halla el número de Nusselt ( $Nu_{dp,h}$ ) que es función de los números de Reynolds y Prandtl y de los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ :

$$Nu_{dp,h} = 2 + C_1 Re_{dp}^{0.5} Pr^{\frac{1}{3}} + C_2 Re_{dp} Pr^{0.5}$$

$$Nu_{dp,h} = 2 + 2.031 \cdot 18.4188^{0.5} \cdot 0.712^{1/3} + 0.049 \cdot 18.4188 \cdot 0.712^{0.5} = 10.545$$

Una vez hallado el Nusselt se procede al cálculo del coeficiente de convección ( $h$ ) empleando la expresión (92):



$$h = \frac{Nu_{dp,h} k_a}{d_p} = \frac{10.545 \cdot 0.02624}{0.00112} = 247.0548 \text{ W/m}^2\text{K}$$

- Coeficiente de transferencia de calor entre la pared del lecho y el fluido ( $h_w$ )

Se procede de la misma manera que en el caso anterior, empleando la expresión (93) se obtiene el valor de  $Nu_{dp,hw}$ :

$$Nu_{dp,hw} = 2.576 Re_{dp}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.0936 Re_{dp}^{0.8} Pr^{0.4}$$

$$Nu_{dp,hw} = 2.576 \cdot 18.4188^{1/3} \cdot 0.712^{1/3} + 0.0936 \cdot 18.4188^{0.8} \cdot 0.712^{0.4} = 6.9152$$

A partir de este valor se calcula el coeficiente de transferencia de calor por convección entre la pared y el fluido ( $h_w$ ):

$$h_w = \frac{Nu_{dp,hw} k_a}{d_p} = \frac{6.9152 \cdot 0.02624}{0.00112} = 162.130 \text{ W/m}^2\text{K}$$

### 6.1.2 CÁLCULO DE LAS CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS EFECTIVAS

Para el cálculo de las conductividades térmicas efectivas del sólido y del fluido se van a emplear los números adimensionales de Reynolds y Prandtl hallados en el punto anterior.

- Conductividad térmica efectiva del fluido ( $k_{a,x}$ )

Como se describió en la expresión (95) la conductividad térmica efectiva del aire puede adoptar dos valores distintos dependiendo del número de Reynolds.

$$k_{a,x} \begin{cases} 0.7k_a & Re_{dp} \leq 0.8 \\ \frac{0.5PrRe_{dp}k_a}{\varepsilon} & Re_{dp} > 0.8 \end{cases}$$

En este caso el número de Reynolds es 18.4188, como es mayor que 0.8 implica que la conductividad térmica efectiva del fluido se calcule del siguiente modo:

$$k_{a,x} = \frac{0.5 \cdot 0.712 \cdot 18.4188 \cdot 0.02624}{0.4} = 0.4302 \text{ W/mK}$$

- Conductividad térmica efectiva del sólido ( $k_{s,x}$ )

A partir de la expresión (96) se puede calcular la conductividad térmica efectiva de la arena, que es función de la conductividad térmica efectiva del aire ( $k_{a,x}$ ) y de la conductividad térmica efectiva estática ( $k_e^0$ ).

$$k_{s,x} = \frac{k_e^0 + 0.5PrRe_{dp}k_s - \varepsilon k_{a,x}}{(1 - \varepsilon)}$$

Con las expresiones (97) y (98) se obtiene  $k_e^0$ :

$$m = 0.280 - 0.757 \log(\varepsilon) - 0.057 \log\left(\frac{k_s}{k_a}\right)$$

$$m = 0.280 - 0.757 \log(0.4) - 0.057 \log\left(\frac{1.28}{0.02624}\right) = 0.485$$

$$\frac{k_e^0}{k_a} = \left(\frac{k_s}{k_a}\right)^m \rightarrow k_e^0 = k_a \left(\frac{k_s}{k_a}\right)^m = 0.02624 \cdot \left(\frac{1.28}{0.02624}\right)^{0.485} = 0.1729 \text{ W/mK}$$

Finalmente:

$$k_{s,x} = \frac{0.1729 + 0.5 \cdot 0.712 \cdot 18.4188 \cdot 1.28 - 0.4 \cdot 0.4302}{(1 - 0.4)} = 13.9904 \text{ W/mK}$$

Número de Reynolds	$Re_{dp} = 18.4188$
Número de Prandtl	$Pr = 0.712$
Coeficiente de transferencia de calor entre las partículas y el fluido	$h = 247.0548 \text{ W/m}^2\text{K}$
Coeficiente de transferencia de calor entre la pared del lecho y el fluido	$h_w = 162.130 \text{ W/m}^2\text{K}$
Conductividad térmica efectiva del fluido	$k_{a,x} = 0.4302 \text{ W/mK}$
Conductividad térmica efectiva del sólido	$k_{s,x} = 13.9904 \text{ W/mK}$

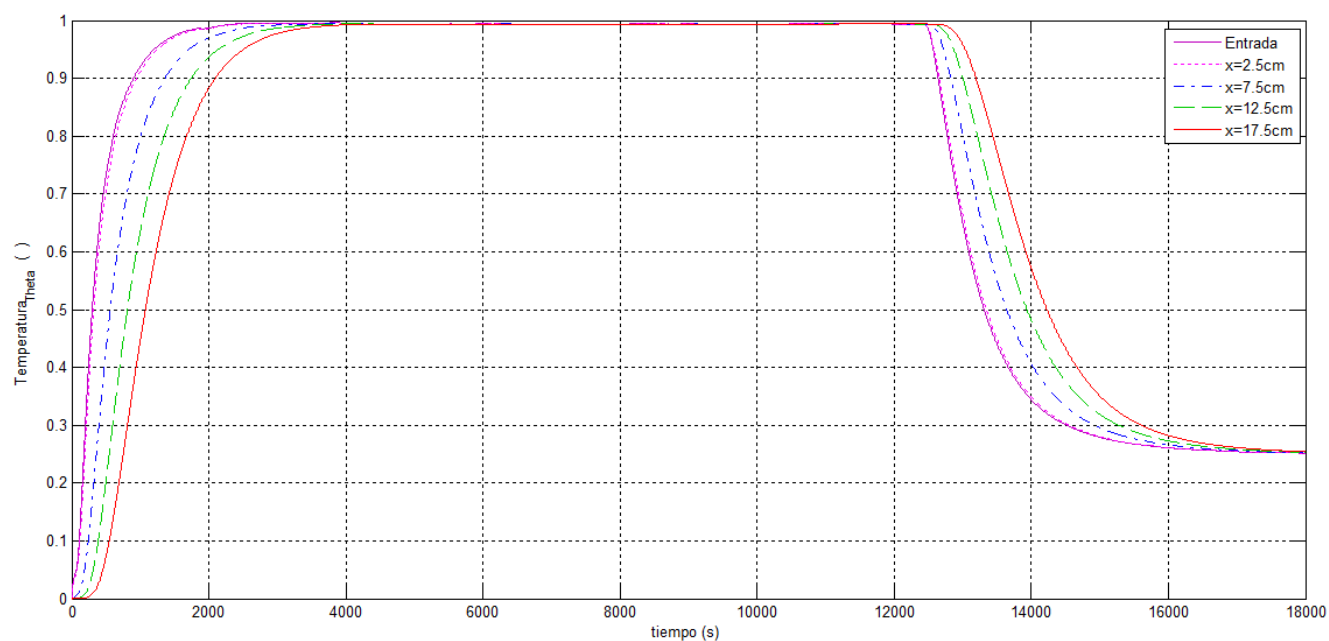
**Tabla 6.** Resumen de los valores numéricos de los parámetros necesarios para la simulación

Con todos los parámetros referentes al lecho fijo calculados se va a proceder a representar gráficamente mediante el software matemático Matlab los resultados de las simulaciones.

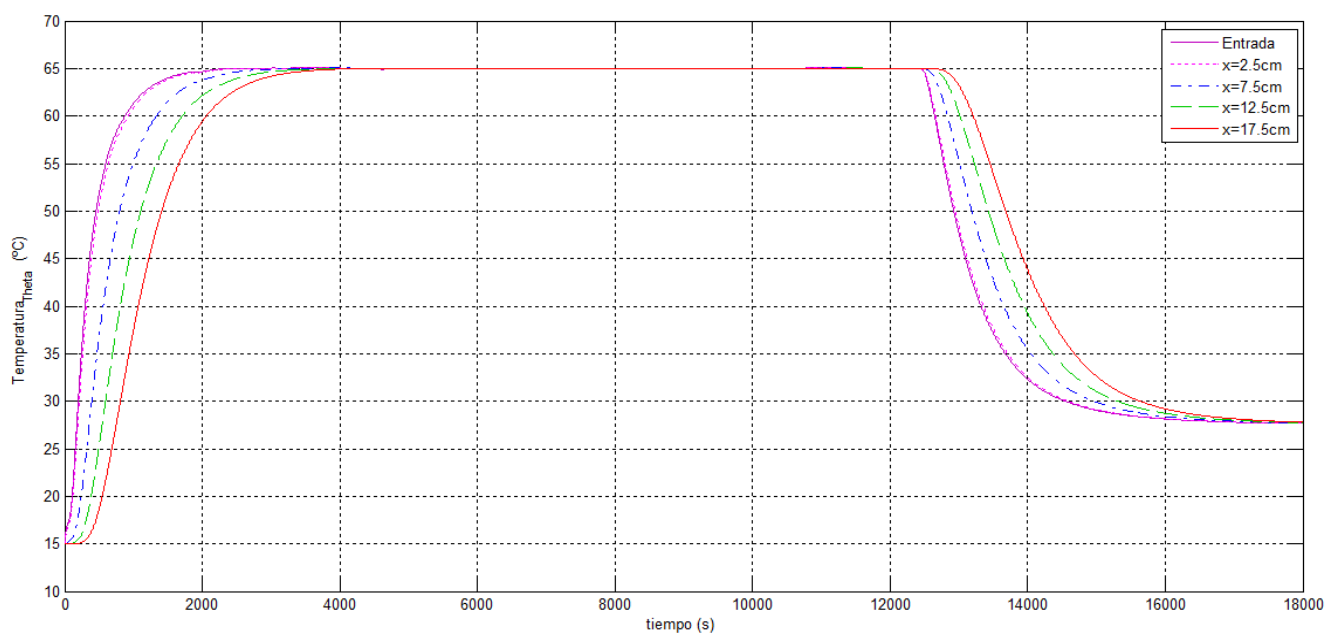
## 6.2 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Para empezar se va a representar la evolución de la temperatura ( $\theta$ ) del sólido con respecto al tiempo en los cuatro puntos del lecho donde se colocaron los termopares, estos puntos corresponden a una altura de 2,5 cm, 7,5cm, 12,5cm, y 17,5cm o lo que es lo mismo a distancias adimensionales  $\hat{x} = 0,125, 0,375, 0,625$  y  $0,875$  de la entrada del lecho.

Se van a mostrar los resultados tanto en forma adimensional como en dimensional ( $^{\circ}\text{C}$ ):



**Gráfica 1.** Evolución temporal de la temperatura adimensional del sólido durante la carga y descarga del lecho.



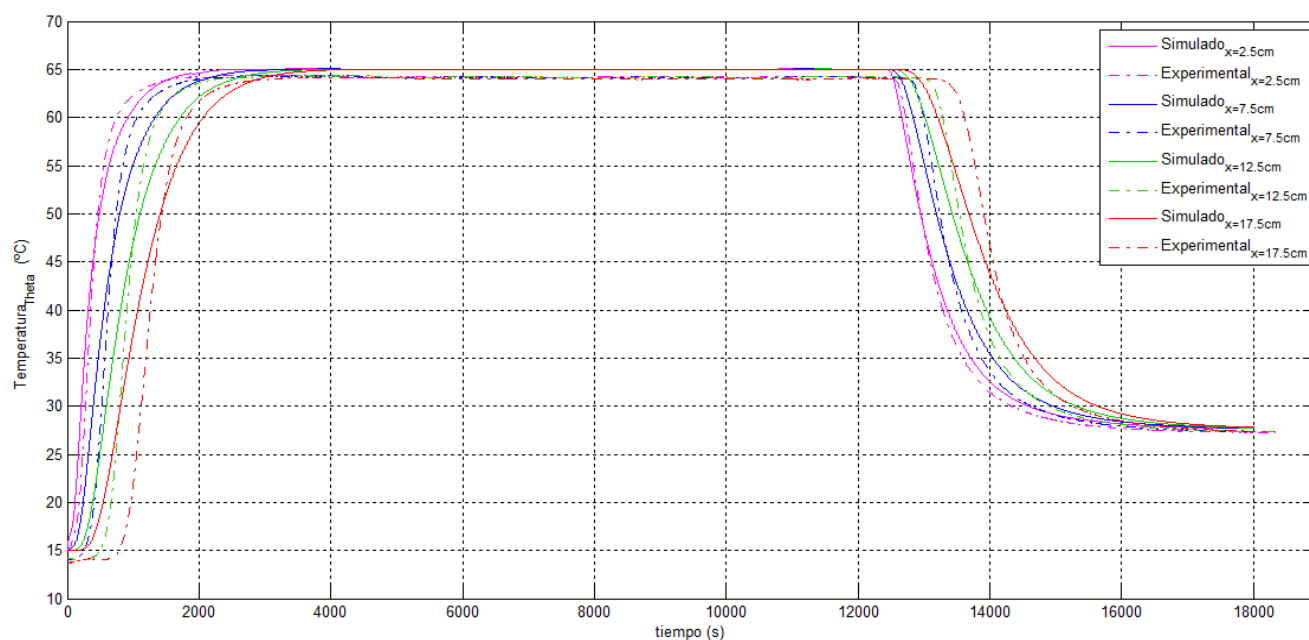
**Gráfica 2.** Evolución temporal de la temperatura dimensional del sólido durante la carga y descarga del lecho.

Se va a comentar la Gráfica 2, ya que al estar en forma dimensional puede resultar más intuitiva.

Como se observa en dicha gráfica, el lecho almacena energía térmica desde el instante inicial que tiene una temperatura ambiente de 15 °C hasta que se alcanza la temperatura establecida de 65 °C. En cuanto a las diferentes posiciones del lecho es importante comentar como los nodos superiores tardan más tiempo que los inferiores en alcanzar una temperatura constante, lo que tiene sentido pues a mayor altura en el lecho se necesita más tiempo para alcanzar el régimen estable.

Una vez que se ha finalizado la carga del lecho tiene lugar el proceso de descarga, en el que el aire se introduce a una temperatura menor que la presente en el lecho y como consecuencia se calienta. Del mismo modo que en la carga son los nodos inferiores los que requieren menor tiempo en alcanzar la temperatura ambiente durante la descarga.

A continuación se representa la validación con los datos experimentales, se van a comparar los datos simulados del sólido con los obtenidos experimentalmente por el departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos. De este modo se comprueba la semejanza entre la realidad y los resultados del modelo.



**Gráfica 3. Comparación de la evolución temporal de la temperatura dimensional del sólido de las medidas experimentales con la simulación.**

En la gráfica 3 se pueden ver las diferencias existentes entre los resultados simulados y los datos experimentales en las cuatro zonas de estudio de la altura del lecho, a 2,5 cm; 7,5 cm; 12,5 cm y 17,5 cm.

Estas discrepancias se deben a que:

En los experimentos, cuando se situaron los termopares a lo largo del lecho se colocó el de entrada (control) en el plenum, ya que para poder medir solamente la temperatura del aire se tenía que colocar el termopar antes del distribuidor, si se hubiese colocado después se tendría también sólido y la medida no sería válida. Por lo tanto, la temperatura de entrada del aire utilizada en la simulación (que es función de control) no es exactamente la real, es mayor que la medida que se debería tener porque el distribuidor acumula calor y una vez que al aire atraviesa los orificios desciende un poco su temperatura, aproximadamente 2°C. (Hoebink y Rietema [8]).

Por este motivo se impuso en el software Matlab que la temperatura inicial del lecho fuese de 15°C, consecuencia de esto son las diferencias que se observan en la gráfica.

Por otra parte, se distingue una pequeña diferencia en la zona en la que se alcanza la temperatura constante, se puede apreciar como las curvas experimentales alcanzan los 65°C quedándose las curvas simuladas un poco por debajo, esto es debido a las pérdidas al ambiente a través del material aislante del lecho.

Como se observa esta diferencia es prácticamente nula, con lo que se puede considerar que no existen pérdidas al ambiente. En los experimentos se utilizó un aislante para el lecho muy eficaz, compuesto de fibra de vidrio y por ello se partió de la hipótesis de despreñar estas pérdidas.

Se podría ajustar la simulación a los experimentos imponiendo un coeficiente de transferencia de calor para cuantificar las pérdidas al exterior.

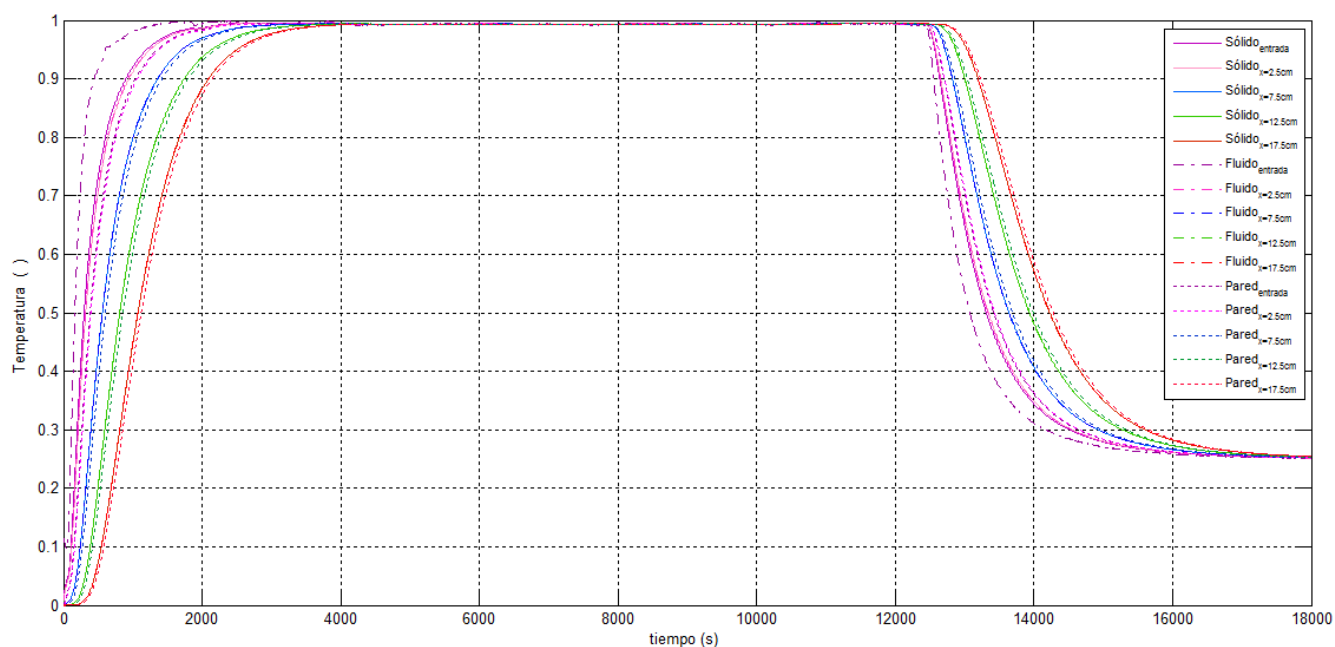
Otra causa de esta variación es la referida a la parte experimental. Inicialmente, no está todo exactamente a la misma temperatura debido a que a experimentos previos la parte inferior del lecho está ligeramente a mayor temperatura que el resto.

También se aprecia en esta gráfica como las curvas simuladas correspondientes a los nodos inferiores (2,5 cm y 7,5 cm) se ajustan de mejor manera a las curvas experimentales, tanto en el proceso de carga como en la zona de temperatura estable y en la descarga del lecho.

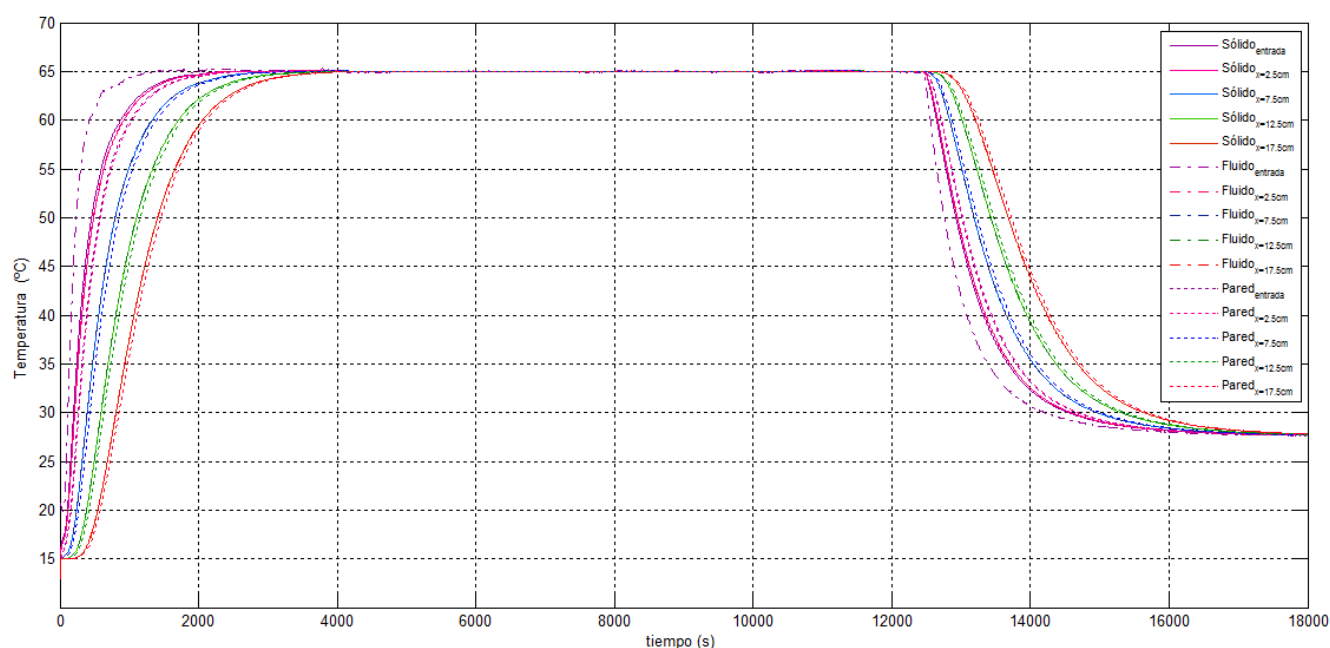
Al contrario, en los nodos que se encuentran a mayor altura (12,5cm y 17,5cm) se nota una mayor diferencia especialmente durante el calentamiento (carga) y el enfriamiento (descarga).

Esto puede deberse a errores del modelo usado para calcular la conductividad térmica efectiva del aire y las partículas.

A continuación se muestran los resultados de la simulación para el sólido, el fluido y la pared del lecho en la entrada (plenum), y en los cuatro puntos de estudio, 2,5 cm; 7,5cm; 12,5cm y 17,5 cm. Se va a representar la evolución temporal adimensional y dimensional ( $^{\circ}\text{C}$ ) de la temperatura en las siguientes gráficas:



**Gráfica 4. Evolución temporal de la temperatura adimensional del sólido, fluido y pared durante la carga y descarga del lecho.**



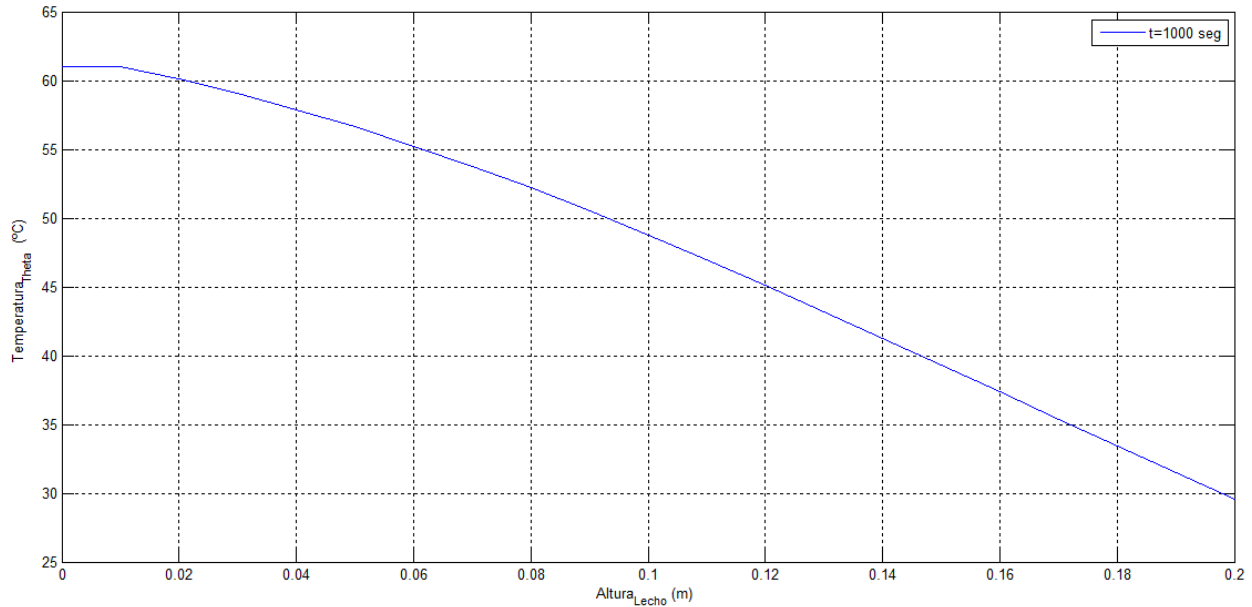
**Gráfica 5. Evolución temporal de la temperatura dimensional del sólido, fluido y pared durante la carga y descarga del lecho.**

En las gráficas 4 y 5 se puede observar que las curvas del sólido y del fluido presentan unas diferencias mínimas, por lo que para simplificar se han representado principalmente las simulaciones del sólido en las anteriores gráficas.

Como se ha visto en los cálculos de parámetros necesarios para la simulación, el coeficiente de transferencia de calor por convección entre las partículas sólidas y el fluido es bastante alto y mucho mayor que el coeficiente de transferencia de calor entre el fluido y la pared del lecho. Es por esto por lo que tiene sentido que al entrar en contacto el sólido y el fluido alcancen una temperatura muy similar en el mismo tiempo y que la pared del lecho sea un poco diferente, su temperatura para el mismo tiempo será un poco inferior que la del sólido y la del fluido.



En la siguiente gráfica se muestra la variación de la temperatura dimensional del sólido respecto a la altura del lecho fijo:



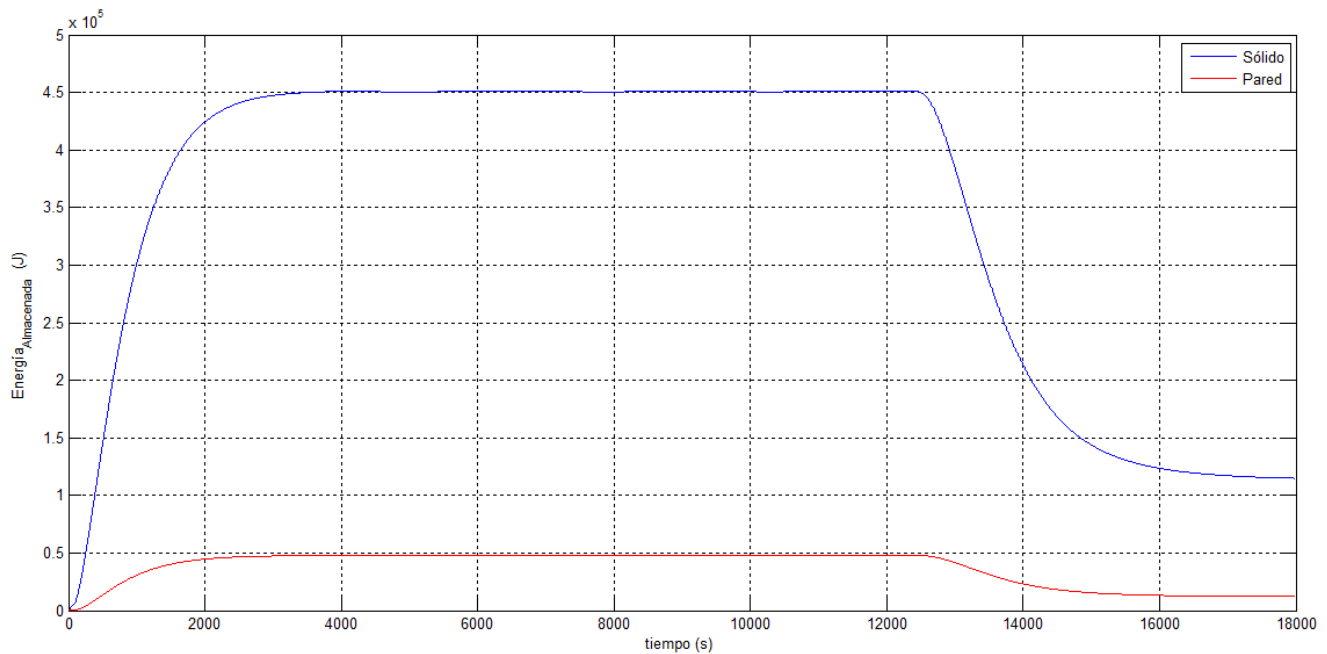
**Gráfica 6. Evolución de la temperatura dimensional del sólido con respecto a la altura del lecho para t=1000 segundos**

En esta gráfica se observa como varía la temperatura desde el instante inicial hasta los primeros 1000 segundos de la simulación. Se ha escogido este tiempo pues es en el que más se pueden apreciar las variaciones entre los distintos puntos de estudio del lecho.

Finalmente se calculó la energía almacenada en el sólido y en la pared con el fin de evaluar la importancia relativa de esta última.

La energía almacenada al cabo de un tiempo t se calculó como:

$$E = \frac{m}{L} C_p \int_{x=0}^{x=L} (T - T_0) \cdot dx$$



**Gráfica 7. Comparación de la energía almacenada en las partículas sólidas con la energía almacenada en la pared del lecho fijo.**

En esta última gráfica se representa la energía almacenada por el sólido y por la pared del lecho en función del tiempo. Como se ve, la energía almacenada al final de la carga en el sólido es de 0,45 MJ mientras que la energía almacenada en la pared está cerca de los 0,05MJ.

Esto implica que la energía almacenada en la pared es un 11.11% de la almacenada en el sólido. Un porcentaje considerable que supone energía ganada respecto a otros estudios en los que solo se tenía en cuenta el almacenamiento del sólido.

Se puede decir por lo tanto que dado el tamaño del lecho de este experimento, la relación entre el material sólido y la pared es suficientemente importante como para tener que considerar la energía almacenada en la pared como un factor relevante. En lechos de mayor tamaño la proporción haría que probablemente la energía almacenada en la pared no fuese un factor a tener en cuenta.



## ***7. CONCLUSIONES***

## 7.1 CONCLUSIONES

En este proyecto a partir de diversos textos se han planteado una serie de hipótesis y establecido unas determinadas condiciones de contorno para realizar un modelo matemático del proceso de almacenamiento de energía térmica en un lecho fijo.

Este almacenamiento se produce por calor sensible y se ha analizado durante los procesos de carga y descarga del lecho. A raíz de estas hipótesis se ha conseguido simplificar un proceso complejo para que el modelo matemático pueda resolverse.

Las ecuaciones que describen el modelo se han resuelto empleando el método matemático de Runge-Kutta de cuarto orden, usando el software matemático Matlab. De esta forma se ha obtenido la evolución temporal de las temperaturas durante el proceso.

Es importante no solo la resolución del modelo sino la concordancia de los resultados obtenidos y su similitud con la realidad. Se trata de conseguir unos resultados que se ajusten de la mejor manera posible a las medidas experimentales del laboratorio.

Como se ha mostrado en el punto anterior, las gráficas presentan pequeñas diferencias pero la simulación se ajusta correctamente a las medidas experimentales dada la dificultad de modelar con exactitud todos los procesos físicos que se dan en el lecho.

Se ha demostrado que el almacenamiento de energía térmica de la pared del lecho es un factor a tener en cuenta respecto a anteriores estudios en los que se solo se analizaba el intercambio de calor entre las partículas sólidas y el fluido. Principalmente esta influencia es debida al tamaño del lecho de la instalación, es decir a la relación entre el sólido y la pared.

Al incluir la pared del lecho en el modelo como una ecuación extra se gana en torno a un 10% de energía almacenada que de otra manera se estaría desperdiciando.

Además, si en futuros estudios se tratase de diseñar un lecho fijo real para una aplicación concreta se podría partir del modelo que se ha creado en este proyecto y modificando fácilmente parámetros como la porosidad del lecho, el material de las partículas sólidas, la altura del lecho y el caudal de fluido de entrada, ver que influencia tienen estos cambios en el proceso de almacenamiento de energía térmica.

Actualmente se están empezando a introducir en el ámbito del almacenamiento térmico los materiales de cambio de fase (PCM), una posible mejora sería realiza este mismo estudio con este tipo de materiales, dada su capacidad de almacenar gran cantidad energía en breves períodos de tiempo. Los PCM se pueden encontrar principalmente en procesos de baja y media temperatura.



## ***8. PRESUPUESTO***

## 8.1 PRESUPUESTO DEL ESTUDIO

A continuación se expone el conjunto de costes asociados a este proyecto, tanto costes de personal como de equipos:

DESCRIPCIÓN	COSTE UNITARIO	CANTIDAD	COSTE TOTAL
Ordenador Portátil	800€	1 unidad	800€
Licencia del Software Matlab	6000€	1 unidad	6000€
Ingeniero Junior	25€/hora	400 horas	10000€
Ingeniero Senior	45€/hora	20 horas	900€

*Tabla 7. Presupuesto del proyecto*

El presupuesto total del proyecto es de DIECISIETE MIL SETECIENTOS EUROS.



## ***9. BIBLIOGRAFÍA***



- [1] Schumann, T.E.W., 1929. "Heat transfer: a liquid flowing through a porous prism". Journal of the Franklin Institute, vol. 208, No. 3, pp 405-416.
- [2] Beasley, D.E., Clark, J.A., 1984. "Transient response of a packed bed for thermal energy storage". Pergamon Press Ltd, vol. 27, No. 9, pp 1659-1669.
- [3] Rady, M., 2009. "Granular phase change materials for thermal energy storage: experiments and numerical simulations". Applied Thermal Engineering, vol. 29, pp. 3149-3159.
- [4] Burden, R.L., Faires, J.D., 1998. "Análisis numérico". 6ªEd, International Thomson, México.
- [5] Ismail, K.A.R., Stuginsky R., 1999. "A parametric study on possible fixed bed models for PCM and sensible heat storage". Applied Thermal Engineering, vol. 19, pp. 757-788.
- [6] Galloway, T.R., Sage, B.H., 1970. "A model of the mechanism of transport in packed distended and fluidised beds". Chemical Engineering Science, vol. 25, No. 3, pp. 495-516.
- [7] Wakao, N., Kaguei, S., 1982. "Heat and mass transfer in packed beds". Gordon and Breach, London.
- [8] Hoebink, J.H.B.J, Rietema, K., 1980. "Drying Granular Solids in Fluidized Bed I". Chemical Engineering Science, vol 35, pp 2135-2140.
- [9] Elsayed, M.M., Megahed, I.E., El-Refae, M.M., 1987. "Experimental testing of fluidized bed thermal storage". Solar & Wind Technology, vol. 5, No. 1, pp. 15-25.
- [10] Izquierdo-Barrientos, M.A., Sobrino, C., Almendros-Ibáñez, J.A., 2013. "Thermal energy storage in a fluidized bed of PCM", Chemical Engineering Journal, vol. 230, pp. 573 -583.
- [11] López, J.I., 2012. "Transferencia de calor en un lecho fijo para almacenamiento de energía térmica". Proyecto fin de Carrera.
- [12] Hänchen, M., Brückner, S., Steinfeld, A., 2011. "High-temperature thermal storage using a packed bed of rocks- Heat transfer analysis and experimental validation". Applied Thermal Engineering, vol. 31, pp. 1798-1806.

[13] Incropera, F.P., De Witt, D.P., 1999. “Fundamentos de transferencia de calor”. Cuarta Edición, Prentice Hall, Méjico.

[14] Vega, P., 2014. “Simulación numérica del almacenamiento de energía térmica en un lecho fijo con materiales de cambio de fase”. Trabajo fin de Master

[15] Schüth, F., 2016. Sistemas de almacenamiento energético. [Online] Investigación y Ciencia: <http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/numero/432/sistemas-de-almacenamiento-energtico-9032>.



## ***10. ANEXO***

En este anexo se incluye el código desarrollado en el software Matlab, utilizando la versión R2013b (8.2.0.701).

```
clc;
clear all; close all;

%CARACTERÍSTICAS DEL LECHO FIJO
L= 0.2; %Altura del lecho [m]
d_i = 0.20; %Diametro interior del lecho [m]
Q = 485/(60*1000); %Caudal de aire [m^3/s]
A = (pi*(d_i^2))/4; %Área transversal del lecho [m^2]
a_w_b = 4/d_i; %Área superficial de la pared interior por unidad de volumen
del lecho [1/m]
epsilon =0.4; %Porosidad del lecho [ ]
u_s = Q/A; %Velocidad superficial [m/s]
u = u_s/epsilon; %Velocidad intersticial [m/s]

%PASOS TEMPORALES Y ESPACIALES
delta_x =0.01; %Separacion entre los nodos [m]
delta_x_adim = delta_x/L; %Separación entre nodos adimensional [ ]
delta_t = 0.1*delta_x/u; %Se considera un delta_t < o = que el tiempo en que
se tarda en recorrer delta_x [s]
delta_t_adim = (delta_t*u)/L; %Paso de tiempo adimensional [ ]
N = floor(L/delta_x)+ 1; %Numero total de nodos
tiempo = 18000 ; %Tiempo de la simulación [s] (5horas)
tiempo_adim =tiempo*u/L; %tiempo adimensional
M = floor(tiempo/delta_t)+1; %Numero de instantes de tiempo
time=(0:M) '*delta_t;
time2=(0:5*delta_t:tiempo);
time2(954930)=[];
k=125001; %k=1+(1000seg/5*delta_t) Tiempo en el que se empieza a cargar el
lecho.
x=(0:delta_x:L);

%DATOS INICIALES DE TEMPERATURAS
[tiempos,control,resistencia,segundo,tercero,cuarto,primero,fuera,rotametro]=
textread('TC_AO_12-01-
17_1402_001.lvm','%f%f%f%f%f%f%f%f','delimiter',' ','headerlines',22);
T_in=(interp1(tiempos,control,time)+273); %Vector de la temperatura de
entrada del fluido
T_max=max(T_in); %Temperatura máxima de entrada del fluido
T_0=(15+273); %Temperatura ambiente
T_in_adim=(T_in-T_0)/(T_max-T_0); %Vector adimensional de la temperatura de
entrada del fluido
```

```
%SÓLIDO (arena)
dp=1.12e-3; %Diámetro de las partículas [m]
rho_s= 2600; %Densidad [Kg/m^3]
cp_s=920; %Calor específico del sólido [J/Kg·K]
k_s=1.28; %Conductividad térmica del solido [W/mK]
a_p=(6*(1-epsilon))/(dp); %Área superficial de las partículas por unidad de
volumen del lecho [1/m]

%FLUIDO (aire)
rho_a = 1.18; %Densidad del fluido
cp_a = 1012; %Calor especifico del fluido
k_a = 0.02624; %Conductividad térmica del fluido
mud_a = 1.8462e-5; %Viscosidad dinámica del fluido [Kg/m·s]
muc_a = mud_a/rho_a; %Viscosidad cinemática del fluido [m^2/s]

%PARED (acero inoxidable AISI 304)
d_o=0.204; %Diámetro exterior del lecho [m]
e=0.002; %Espesor de la pared [m]
rho_w = 7900; %Densidad del acero [kg/m^3]
cp_w = 477; %Calor especifico del acero [J/kg K]
k_w = 14.9 ; %Conductividad térmica del acero [W/m K]
a_w_w = (4*d_i)/((d_o^2)-(d_i^2)); %Área superficial de la pared interior por
unidad de volumen de la pared [1/m]

%CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES
Re_dp = (dp*u_s)/muc_a; %numero de Reynolds [ ]
Pr = (cp_a*mud_a)/k_a; %numero de Prandtl [ ]

%CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN
Nu_dp,h = 2+2.031*(Re_dp^0.5)*(Pr^(1/3))+0.049*Re_dp*(Pr^0.5); %Numero de
Nusselt para Re_dp > 0.8
h = (Nu_dp,h*k_a)/(dp); %Coeficiente entre el fluido y las partículas sólidas
[W/K·m^2], según el texto [6]
Nu_dp,hw = ((2.576*(Re_dp^(1/3))*(Pr^(1/3)))+(0.0936*(Re_dp^0.8)*(Pr^0.4)));
%Número de Nusselt [ ]
h_w = (k_a/(dp))* Nu_dp,hw; %Coeficiente entre el fluido y la pared del lecho
[W/K·m^2], según el texto [5]

%CÁLCULO DE LAS CONDUCTIVIDADES TÉRMICA EFECTIVAS
if Re_dp <= 0.8;
k_ax = k_a*0.7;
else
k_ax = (0.5*Pr*Re_dp*k_a)/epsilon; %Fluido [W/m·K]
end
m=0.280-0.757*log10(epsilon)-0.057*log10(k_s/k_a);
k_e = ((k_s/k_a)^m)*k_a; %Conductividad térmica efectiva estática [W/m·K]
k_sx = ((k_e+(0.5*Pr*Re_dp*k_s)-(epsilon*k_ax))/(1-epsilon)); %Sólido [W/m·K]
```

---

```
%CÁLCULO DE LOS NUMEROS ADIMENSIONALES DE BIOT Y FUORIER

%Fluido
alfa_a = k_ax/(rho_a*cp_a); %Difusividad térmica [m^2/s]
Fo_a = alfa_a/(u*L); %Numero de Fourier [ ]
Bi_a = (h*a_p*(L^2))/(k_ax*epsilon); %Numero Biot [ ]
Bi_a_w = (h_w*a_w_b*(L^2))/(k_ax*epsilon);

%Sólido
alfa_s = k_sx/(rho_s*cp_s);
Fo_s=alfa_s/(u*L);
Bi_s=(a_p*h*(L^2))/(k_sx*(1-epsilon));

%Pared
alfa_w = k_w/(rho_w*cp_w);
Fo_w=alfa_w/(u*L);
Bi_w =(a_w_w*h_w*(L^2))/(k_w);

%DEFINICION DE LAS MATRICES DE TEMPERATURAS PARA SÓLIDO, FLUIDO Y PARED
T = zeros(N,floor(M/5));
Theta = zeros(N,floor(M/5));
Phi = zeros(N,floor(M/5));

%CÁLCULO DE LAS MATRICES DE TEMPERATURA PARA FLUIDO, SOLIDO Y PARED.
%MÉTODO DE RUNGE-KUTTA 4º ORDEN
T_new = zeros (N,1) ; %T(j+1)
T_old = zeros (N,1); %T (j)
Theta_new = zeros (N,1) ;
Theta_old = zeros (N,1);
Phi_new = zeros (N,1) ;
Phi_old = zeros (N,1);

T=zeros(N,floor(M/5));

K1_T = zeros(N,1); %se define la matriz K1 del fluido
K2_T = zeros(N,1); %se define la matriz K2 del fluido
K3_T = zeros(N,1); %se define la matriz K3 del fluido
K4_T = zeros(N,1); %se define la matriz K4 del fluido

Theta=zeros(N,floor(M/5));
K1_Theta = zeros(N,1); %se define la matriz K1 del sólido
K2_Theta = zeros(N,1); %se define la matriz K2 del sólido
K3_Theta = zeros(N,1); %se define la matriz K3 del sólido
K4_Theta = zeros(N,1); %se define la matriz K4 del sólido
```

```
Phi=zeros(N,floor(M/5));
K1_Phi = zeros(N,1); %se define la matriz K1 de la pared
K2_Phi = zeros(N,1); %se define la matriz K2 de la pared
K3_Phi = zeros(N,1); %se define la matriz K3 de la pared
K4_Phi = zeros(N,1); %se define la matriz K4 de la pared

T_old(1)=T_in_adim(1);

for j=1:M

%CÁLCULO DE LAS K PARA FLUIDO, SÓLIDO Y PARED

%Para el segundo nodo debido a las condiciones de contorno en x=0, las K se
%calculan del siguiente modo

i=2;

K1_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*(T_old(i+1)-
2*T_old(i)+T_in_adim(j)))/(delta_x_adim^2))+Bi_a*Fo_a*(Theta_old(i)-T_old(i))-
((T_old(i)-T_in_adim(j))/delta_x_adim)+ Bi_a_w*Fo_a*(Phi_old(i)-T_old(i)));
K1_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*(Theta_old(i+1)-
Theta_old(i))/(delta_x_adim^2))-Bi_s*Fo_s*(Theta_old(i)-T_old(i)));
K1_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*(Phi_old(i+1)-Phi_old(i))/(delta_x_adim^2))-
Bi_w*Fo_w*(Phi_old(i)-T_old(i)));

K2_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+0.5*K1_T(i+1))-
2*(T_old(i)+0.5*K1_T(i)))+(T_in_adim(j+1)+T_in_adim(j))/2))/(delta_x_adim^2))+
(Bi_a*Fo_a*((Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i)))-
((T_old(i)+0.5*K1_T(i))-(T_in_adim(j+1)+T_in_adim(j))/2)/delta_x_adim) +
Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+0.5*K1_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));
K2_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+0.5*K1_Theta(i+1))-
(Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));
K2_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+0.5*K1_Phi(i+1))-
(Pi_old(i)+0.5*K1_Phi(i)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+0.5*K1_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));

K3_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+0.5*K2_T(i+1))-
2*(T_old(i)+0.5*K2_T(i)))+(T_in_adim(j+1)+T_in_adim(j))/2)/(delta_x_adim^2))+B
i_a*Fo_a*((Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i)))-
((T_old(i)+0.5*K2_T(i))-(T_in_adim(j+1)+T_in_adim(j))/2)/delta_x_adim) +
Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));
K3_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+0.5*K2_Theta(i+1))-
(Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));
```

```
K3_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+0.5*K2_Phi(i+1))-
(Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));

K4_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+K3_T(i+1))-
2*(T_old(i)+K3_T(i))+T_in_adim(j+1)))/(delta_x_adim^2))+Bi_a*Fo_a*((Theta_old(
i)+K3_Theta(i))-(T_old(i)+K3_T(i)))-((T_old(i)+K3_T(i))-
T_in_adim(j+1))/delta_x_adim + Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+K3_Phi(i))-
(T_old(i)+K3_T(i))));
K4_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+K3_Theta(i+1))-
(Theta_old(i)+K3_Theta(i)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+K3_Theta(i))-(T_old(i)+K3_T(i))));
K4_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+K3_Phi(i+1))-
(Phi_old(i)+K3_Phi(i)))/(delta_x_adim^2))-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+K3_Phi(i))-
(T_old(i)+K3_T(i))));

for i=3:N-1;
K1_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)-2*T_old(i)+T_old(i-
1)))/(delta_x_adim^2))+Bi_a*Fo_a*(Theta_old(i)-T_old(i))-((T_old(i)-T_old(i-
1))/delta_x_adim)+Bi_a_w*Fo_a*(Phi_old(i)-T_old(i)));
K1_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*(Theta_old(i+1)-2*Theta_old(i)+Theta_old(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_s*Fo_s*(Theta_old(i)-T_old(i)));
K1_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*(Phi_old(i+1)-2*Phi_old(i)+Phi_old(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_w*Fo_w*(Phi_old(i)-T_old(i)));

K2_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+0.5*K1_T(i+1))-
2*(T_old(i)+0.5*K1_T(i))+(T_old(i-1)+0.5*K1_T(i-1)))/(delta_x_adim^2))+
Bi_a*Fo_a*((Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i)))-
((T_old(i)+0.5*K1_T(i))-(T_old(i-1)+0.5*K1_T(i-1)))/delta_x_adim +
Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+0.5*K1_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));
K2_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+0.5*K1_Theta(i+1))-
2*(Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i))+(Theta_old(i-1)+0.5*K1_Theta(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+0.5*K1_Theta(i))-
(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));
K2_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+0.5*K1_Phi(i+1))-
2*(Phi_old(i)+0.5*K1_Phi(i))+(Phi_old(i-1)+0.5*K1_Phi(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+0.5*K1_Phi(i))-
(T_old(i)+0.5*K1_T(i))));

K3_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+0.5*K2_T(i+1))-
2*(T_old(i)+0.5*K2_T(i))+(T_old(i-1)+0.5*K2_T(i-1)))/(delta_x_adim^2))+
Bi_a*Fo_a*((Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i)))-
((T_old(i)+0.5*K2_T(i))-(T_old(i-1)+0.5*K2_T(i-1)))/delta_x_adim +
Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i))-(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));
K3_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+0.5*K2_Theta(i+1))-
2*(Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i))+(Theta_old(i-1)+0.5*K2_Theta(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+0.5*K2_Theta(i))-
(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));
```



```
K3_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+0.5*K2_Phi(i+1))-
2*(Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i)))+(Phi_old(i-1)+0.5*K2_Phi(i-
1))))/(delta_x_adim^2))-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+0.5*K2_Phi(i))-
(T_old(i)+0.5*K2_T(i))));

K4_T(i)=delta_t_adim*((Fo_a*((T_old(i+1)+K3_T(i+1))-
2*(T_old(i)+K3_T(i)))+(T_old(i-1)+K3_T(i-1)))/(delta_x_adim^2))+
Bi_a*Fo_a*((Theta_old(i)+K3_Theta(i))-(T_old(i)+K3_T(i)))-
(((T_old(i)+K3_T(i))-(T_old(i-1)+K3_T(i-1)))/delta_x_adim) +
Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(i)+K3_Phi(i))-(T_old(i)+K3_T(i))));
K4_Theta(i)=delta_t_adim*((Fo_s*((Theta_old(i+1)+K3_Theta(i+1))-
2*(Theta_old(i)+K3_Theta(i)))+(Theta_old(i-1)+K3_Theta(i-
1)))/(delta_x_adim^2))-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(i)+K3_Theta(i))-
(T_old(i)+K3_T(i))));
K4_Phi(i)=delta_t_adim*((Fo_w*((Phi_old(i+1)+K3_Phi(i+1))-
2*(Phi_old(i)+K3_Phi(i)))+(Phi_old(i-1)+K3_Phi(i-1)))/(delta_x_adim^2))-
Bi_w*Fo_w*((Phi_old(i)+K3_Phi(i))-(T_old(i)+K3_T(i))));
end

%Para el último nodo debido a las condiciones de contorno en x=L las K se
calculan del siguiente modo:

K1_T(N)=delta_t_adim*(Bi_a*Fo_a*(Theta_old(N)-T_old(N))-((T_old(N)-T_old(N-
1))/delta_x_adim) +Bi_a_w*Fo_a*(Phi_old(N)- T_old(N)));
K1_Theta(N)=delta_t_adim*(-Bi_s*Fo_s*(Theta_old(N)-T_old(N)));
K1_Phi(N)=delta_t_adim*(-Bi_w*Fo_w*(Phi_old(N)-T_old(N)));

K2_T(N)=delta_t_adim*(Bi_a*Fo_a*((Theta_old(N)+0.5*K1_Theta(N))-
(T_old(N)+0.5*K1_T(N)))-(((T_old(N)+0.5*K1_T(N))-(T_old(N-1)+0.5*K1_T(N-
1)))/delta_x_adim) + Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(N)+0.5*K1_Phi(N))-
(T_old(N)+0.5*K1_T(N))));
K2_Theta(N)=delta_t_adim*(-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(N)+0.5*K1_Theta(N))-
(T_old(N)+0.5*K1_T(N))));
K2_Phi(N)=delta_t_adim*(-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(N)+0.5*K1_Phi(N))-
(T_old(N)+0.5*K1_T(N))));

K3_T(N)=delta_t_adim*(Bi_a*Fo_a*((Theta_old(N)+0.5*K2_Theta(N))-
(T_old(N)+0.5*K2_T(N)))-(((T_old(N)+0.5*K2_T(N))-(T_old(N-1)+0.5*K2_T(N-
1)))/delta_x_adim) + Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(N)+0.5*K2_Phi(N))-
(T_old(N)+0.5*K2_T(N))));
K3_Theta(N)=delta_t_adim*(-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(N)+0.5*K2_Theta(N))-
(T_old(N)+0.5*K2_T(N))));
K3_Phi(N)=delta_t_adim*(-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(N)+0.5*K2_Phi(N))-
(T_old(N)+0.5*K2_T(N))));
```

```
K4_T(N)=delta_t_adim*(Bi_a*Fo_a*((Theta_old(N)+K3_Theta(N))-(T_old(N)+K3_T(N)))-((T_old(N)+K3_T(N))-(T_old(N-1)+K3_T(N-1)))/delta_x_adim)+Bi_a_w*Fo_a*((Phi_old(N)+K3_Phi(N))-(T_old(N)+K3_T(N)));
K4_Theta(N)=delta_t_adim*(-Bi_s*Fo_s*((Theta_old(N)+K3_Theta(N))-(T_old(N)+K3_T(N))));
K4_Phi(N)=delta_t_adim*(-Bi_w*Fo_w*((Phi_old(N)+K3_Phi(N))-(T_old(N)+K3_T(N))));

%Temperaturas Fluido
T_new(2:N)=T_old(2:N)+(1/6).*(K1_T(2:N)+2*K2_T(2:N)+2*K3_T(2:N)+K4_T(2:N));

%Temperaturas Sólido
Theta_new(2:N)=Theta_old(2:N)+(1/6).*(K1_Theta(2:N)+2*K2_Theta(2:N)+2*K3_Theta(2:N)+K4_Theta(2:N));

%Temperaturas Pared
Phi_new(2:N)=Phi_old(2:N)+(1/6).*(K1_Phi(2:N)+2*K2_Phi(2:N)+2*K3_Phi(2:N)+K4_Phi(2:N));

%Condiciones de contorno para el solido x=0
Theta_new(1)=Theta_new(2);

%Condiciones de contorno para la pared x=0
Phi_new(1)=Phi_new(2);

%Condiciones de contorno para el fluido x=0
T_new(1)=T_in_adim(j+1);

if floor(j/5) == (j/5)
T(:,(floor(j/5)))= T_new;
Theta(:,(floor(j/5)))= Theta_new;
Phi(:,(floor(j/5)))= Phi_new;

end
T_old = T_new;
Theta_old = Theta_new;
Phi_old = Phi_new;

end
```

```
%TEMPERATURA DIMENSIONAL [°C]
T_dim = zeros(N,floor(M/5)); %FLUIDO
T_dim = ((T.*(T_max-T_0))+T_0)-273;

Theta_dim = zeros(N,floor(M/5)); %SÓLIDO
Theta_dim = ((Theta.*(T_max-T_0))+T_0)-273;

Phi_dim = zeros(N,floor(M/5)); %PARED
Phi_dim = ((Phi.*(T_max-T_0))+T_0)-273;

%ENERGÍA ALMACENADA

Estored_s= ((1/N)*rho_s*(1-
epsilon)*(pi*(d_i^2)*L)/4)*cp_s*sum((Theta_dim+273)-T_0)); %Almacenada por
el Sólido

Estored_p=((1/N)*rho_w*((pi*((d_o^2)-(d_i^2))*L)/4)*cp_w*sum((Phi_dim+273)-
T_0)); %Almacenada por la pared del lecho
```